



单位代码 10006

学 号 13071141

分 类 号 V439+.4

密 级

北京航空航天大学

BEIHANG UNIVERSITY

毕业设计(论文)

电推进等离子体的 PIC 程序设计

院(系)名称 高等工程学院

专业名称 飞行器动力工程(航天)

学生姓名 崔忱

指导教师 汤海滨

2017年 6月

北京航空航天大学

本科生毕业设计（论文）任务书

I、毕业设计（论文）题目：

电推进等离子体的 PIC 程序设计

II、毕业设计（论文）使用的原始资料（数据）及设计技术要求：

原始资料：有关 PIC 方法和微型圆柱霍尔电推力器仿真的期刊及会议论文

原始数据：仿真计算域由推力器设计人员给出，磁场由 Comsol 软件绘制

技术要求：1. 仿真结果能正确反映推力器放电室内的等离子体分布及变化趋势；

2. 提升程序运行效率，使程序运行时间控制在三天内；

III、毕业设计（论文）工作内容：

1. 掌握网格粒子模拟 (PIC) 方法的原理，掌握圆柱型霍尔推力器的结构特点和工作原理，整理归纳国内外关于该类型推力器的仿真文献；

2. 将 PIC 方法应用到圆柱型霍尔电推力器中，编制适合于该推力器的仿真程序，用已有算例进行验证；

3. 对不同磁场下的放电情况进行仿真分析，得到放电室内的等离子体数密度、温度、电势等参数的分布情况，并得出结论。

IV、主要参考资料:

[1] A. Smirnov, Y. Raitses, and N. J. Fisch. Electron cross-field transport in a low power cylindrical Hall thruster [J]. Physics of Plasmas 11, 4922 (2004).

[2] Artem N. Smirnov. Experimental and theoretical studies of cylindrical hall thrusters [D]. PhD Thesis in Princeton University, 2006.

[3] Laurent Garrigues, Gerjan J. M. Hagelaar. Simulations of a Miniaturized Cylindrical Hall Thruster. IEEE Transactions on Plasma Science, Vol. 36, No. 5, October 2008

高等工程 学院（系） 飞行器动力工程 专业类 132312 班

学生 崔忱

毕业设计（论文）时间： 2017 年 1 月 15 日至 2017 年 6 月 1 日

答辩时间： 2017 年 6 月 15 日

成 绩： _____

指导教师： _____

兼职教师或答疑教师（并指出所负责部分）：

_____系（教研室）主任（签字）： _____



本人声明

我声明，本论文及其研究工作是由本人在导师指导下独立完成的，在完成论文时所利用的一切资料均已在参考文献中列出。

作者：崔 忱

签字：

时间：2017 年 6 月



电推进等离子体的 PIC 程序设计

学 生：崔 忱

指导老师：汤海滨

摘 要

电推进是目前在宇航工程界受到众多研究者关注的一种新形式的推进方式。其工作原理是利用电磁场加速等离子体从而获得推力。为了更好的设计电推进器，理解其中等离子体的物理机理成为了必不可少的环节。

针对电推进器中等离子体的特征，数值研究成为了合适的研究方法。在众多模拟手段中，粒子-网格法(PIC)是被广为接受的模拟方法。本文根据实际情况设计开发了一套针对于电推进等离子体的 PIC 程序，并利用空碰撞法解决了电离问题。同时针对于 PIC 程序提出了并行化的设计思路，利用 MPI 开发了 DADI 电场求解器，并对于并行化的电场求解器进行了验证。通过验证发现加速比约 2.37，并行效率可以达到 59.25%。

本文在验证了程序准确性后利用开发的 PIC 程序对于圆柱型霍尔推力器在 0 磁环、1 磁环、3 磁环、6 磁环数目下的电势、电子浓度、离子浓度等物理量分布进行了计算，发现磁场位形对于物理量分布有着显著影响。强磁场可通过改变电子浓度的分布对于其他物理量产生影响。因此设计圆柱型霍尔推力器过程需要慎重考虑磁场位形。

关键词：电推进，PIC 程序，并行计算，磁场位形，物理特性



PIC Code for the Plasma in the Electric Propulsion

Author: CUI Chen

Tutor: TANG Hai-bin

Abstract

Electric Propulsion is a new type propulsion method which is concerned by many of the researchers in the area of aerospace engineering. The working principle of the electric propulsion is to utilize the electromagnetic field to accelerate the plasma and then get the thrust. In order to improve the design of the electric propulsion devices, understanding the physical principle of plasma becomes an unavoidable process.

Numerical simulation becomes a suitable research method due to the specialties of the plasma in the chamber of the electric propulsion devices. Among the types of simulation methods, PIC has been selected as an important method. This thesis developed a PIC code for the research of the electric propulsion plasma and solved the collision problem by using MCC method. Meanwhile, this thesis provides a parallelization method for this code using MPI and after test we found the accelerate ratio is about 2.37 and the parallelization efficiency is about 59.25%.

This paper used the developed code to calculate the working condition of the Cylindrical Hall Thruster's discharge chamber under different magnetic field. The magnetic field is produced by magnetic ring under the number of 0,1,3,6. And the working condition include potential, density of electrons and density of ions. It has been found that the magnetic field had significant influence on the working condition so the magnetic field might be an important issue of designing new thrusters.

Key words: Electric Propulsion, Newly Designed PIC code, Parallel Programming, Magnetic Field, Physical Condition



目 录

本人声明	I
目 录	IV
1 绪论.....	1
1.1 电推进的背景和意义	1
1.2 国内外相关研究进展	4
1.3 主流数值方法.....	6
1.4 本文章节安排.....	8
2 电推进的等离子体理论及工作原理	9
2.1 电推进器中的电子运动与电子传导	9
2.2 粒子之间碰撞	12
2.3 几种电推进器的特有物理问题	14
2.4 本章小结	16
3 PIC 仿真数值方法.....	17
3.1 全粒子-网格法 (Fully-PIC) 介绍.....	17
3.2 计算域及网格	18
3.3 时间步长的计算以及选取	20
3.4 电场、磁场的计算及边界条件设置	21
3.5 粒子运动实现	26
3.6 粒子分布与入射	28
3.7 粒子运动边界处理	31
3.8 粒子碰撞实现.....	32
3.9 加速计算方法	34
3.10 并行化电场求解.....	36
3.11 本章小结	40
4 计算结果讨论	41
4.1 代码验证	41
4.2 电场电势分布结果	45



4.3 电子、离子分布	49
4.4 电子温度分布	52
4.5 并行验证	53
4.6 小结	55
结 论	56
致 谢	58



1 绪论

1.1 电推进的背景和意义

随着人类科学技术进步逐渐加快,太空探索活动也越来越被重视。伴随着太空探测活动的蓬勃发展,太空探测器的研发工作也在如火如荼的进行,因此对于探测器推进系统的要求也在逐渐提高。当前,对于推进技术的研究进入了前所未有的新时期,特种推进得到了大量研究人员的青睐与重视。在特种推进技术中,电推进尤其被重视。近年来,电推进取得了空前的进展,越来越多的型号进入了工程应用阶段,被应用到了新近发射的探测器、卫星上。

电推进和化学推进存在着本质上的工作原理的不同。电推进主要是利用电弧使气体放电或者高温加热气体使得气体电离产生等离子体,并利用电磁场的作用力加速等离子体以获得推力的推进方式,又被称为等离子推进器或者电火箭。相对于传统的化学推进器来说,电推进最突出的优点就是它具有高比冲的特性,可以达到传统化学推进模式的1.5倍到25倍,并且可以摆脱化学试剂所蕴含的化学能的限制。传统化学推进的工作原理是利用了化学试剂反应产生的内能加热其反应产生的气体或者其所携带的推进剂在喷管中膨胀产生推力。电推进则不依赖于这个限制,由于采用电磁作用产生的推进力,其只受电能制约。虽然电推进器由于受到了喷出物质量小的制约导致推力不大,但是由于其比冲高,电推进产生相同的推力所需的推进剂远远低于化学推进器。这个特性使得电推进器非常适合作为深空推进器的主要动力装置,同时也适用于卫星的位置保持、姿态调整、轨道修正等任务。可以延长卫星的轨道服务时长,降低运行费用成本。

电推进系统按照其加速工质产生推力模式的不同可以分为三种类型:电热式、静电式和电磁式。电热式的电推力器目前主要包括:利用电阻的焦耳效应产生热量加热工质的电阻式推进器、利用高温电弧产生热量的电弧喷射推进器和利用微波加热工质产生等离子体的微波等离子体推进器。静电式主要包括:离子推进器、场发射效应推进器和胶质推进器,其中离子发动机又分为电子轰击式离子发动机和射频离子发动机。电磁式的电推进器主要包含:霍尔推进器、脉冲等离子体推进器、自磁场磁等离子体推进器和外加场磁等离子体推进器。

根据前文所述,电推进装置的几个潜在的应用是卫星的位置保持和变轨、深空探测

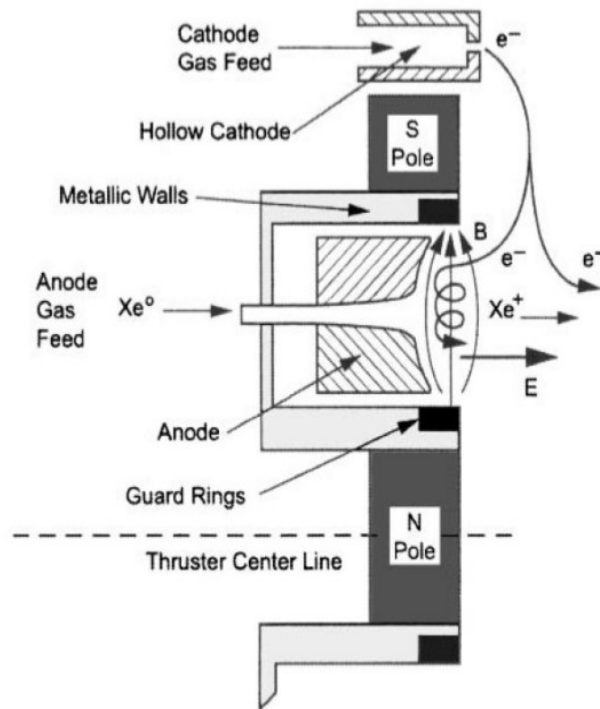
主推进器、大功率飞船主推进器等。由于电推进具有如此多的潜在应用，目前许多研究者关注着对于电推进的研究。国际学术上研究电推进的主流方法主要有实验法和仿真法两种方法，其中仿真法中主要又分为流体法和粒子法。粒子法由于其计算准确的特性备受青睐。本文的目的就是针对于电推进器中的等离子体设计一套通用的 PIC 程序，同时研究其可行的加速手段，并且将这个通用平台专用化，研究关于微小型卫星上的圆柱型霍尔推进器的物理问题，以此对于程序进行验证。

利用粒子方法模拟研究等离子体早在上个世纪 60 年代就已经由研究者提出了。在美国加州大学伯克利分校的研究者们首先研究了纯粒子法，但是过大的计算量令研究者们难以接受这一算法。在 70 年代末，Birdsall^[12] 和 Langdon 等人创新的提出了将 CFD 中常使用的网格法运用到等离子体的计算之中去，从而提出了粒子-网格法（PIC 方法）。经过数十年的发展，该方法已经成为了主要的研究等离子体的方法之一。

下面简要介绍微小型卫星和圆柱型霍尔推进器。

目前当前随着卫星技术的不断进步，微小型卫星成为了关注的热点。微小型卫星由于其自身大小的原因，带来了许多便利性，比如成本低、生产快、位置隐蔽等，然而，其大小也限制了其零部件尤其是推进装置尺寸不得过大，且没有过多空间储存传统化学推进模式所需的燃料。同时，由于微小型卫星的尺寸小，转动惯量小，在空间中所受的干扰力矩也小，克服干扰力矩所需的推力大小一般在 mN 量级，因此其对于空间机动的精度要求更高。这也要求了微小型卫星的推进装置具有高精度的特点。

根据前文所述的电推进装置的特点以及微小型卫星的姿态调节及动力装置的需求，可以发现，电推进非常完善的符合了微小型卫星的需求。霍尔推进器作为工程应用比较成熟的一种电推进器当仁不让的成为了首选。霍尔推进器的工作原理并不复杂，其组成结构一般由一个圆环形的放电室、铁芯、电磁线圈和放置在通道出口的阴极发生器构成。推进剂由位于放电室内部的阳极流入。图 1.1 展示了霍尔推力器的大体结构。在霍尔推进器的放电室内，线圈产生了径向磁场，利用径向磁场可以约束住比较轻的电子，但是对于质量比较大的离子则影响较小。一般利用氙作为霍尔推进器的工质。利用外部的阴极发射电子，电子进入放电室，在正交的电场磁场中出现了霍尔效应，产生了霍尔电流，使得轴向电流减弱，飘逸轨迹接近闭合曲线，与氙原子碰撞，使得氙原子发生电离，产生等离子体。离子由于基本不受磁场影响，在电场加速下喷出推进器，利用反冲作用产生推力。

图 1.1 环形金属壁面微型霍尔推力器工作原理图^[1]

目前的主要的霍尔推进器主要分为稳态推进器和阳极层推进器两种。稳态推进器目前的研究和发展比较成熟，已经有多种型号在全球各国投入使用。后者则可以将对于等离子体的加速区外推到通道以外，这样可以减少等离子体对于壁面的腐蚀。霍尔推进器的多种优良特性使得研究者对其产生了较大的兴趣，目前比较热点的方向之一是利用霍尔推进器作为霍尔推进器的主推进器。为了使霍尔推进器能够被应用到微小型卫星上，霍尔推进器必须被缩小。但是其效率却不能发生显著变化。各国研究者根据工程经验和物理机理，提出了很多关于霍尔推进器缩比模型和经验公式。根据 J. Ashkenazy 和 Y. Raitses 等人提出的线性缩比假设，环形放电通道内的磁场大小 B 应与缩比因子 ε ($\varepsilon < 1$) 成反比才能维持推力器效率不变。这说明为了保证小型化以后的霍尔推进器效率不变，其磁场必须要加强。但这对于小型的霍尔推进器是一个比较大的技术难点。由于按比例缩小了尺寸，磁极、磁芯和热屏蔽等励磁部件都必须压缩尺寸甚至被取消，这严重影响了强磁场的产生。同时由于小型化，霍尔推进器内部的表面积体积比发生了改变，进一步导致了放电通道的腐蚀，这会影响到霍尔推进器的寿命。传统的霍尔推进器在这里遇到了难关。

考虑到以上因素，来自 EPPDyL 和 PPPL 的 Dr.Raistes 等人将圆环形霍尔推进器器



的阳极缩短,得到了圆柱型霍尔推进器,如图 2 所示。圆柱型霍尔推进器的主要特点在于,由两部分构成。内部的环形阳极组成了圆环区,外部比较长的部分是含有优化的会切磁场的圆柱区。与同类型的圆环形霍尔推进器比较,圆柱型霍尔推进器具有比较低的面积-体积比,这可以使得圆环形霍尔推进器的墙壁电势损失更少,就会导致圆环形霍尔推进器所受到的腐蚀会相对来说比较少。过去的研究表明,在霍尔推进器的电子输运机制之中,磁场中的电子传导率出现了较为异常的反应。研究表明了在这之中,主要是电子对于场波动的响应和对于墙壁的碰撞导致了这些异常现象。因此,为了提高霍尔推进器的效率,我们必须理解霍尔推进器的内部放电现象。因此,我们有必要对于这种创新的圆柱型霍尔推进器的在不同磁场下的内部输运机制进行研究。本文的研究正是针对这个问题开展。

1.2 国内外相关研究进展

目前国内外已经有研究者对于圆环型推进器进行了一些实验研究。9cm 的圆柱型霍尔推进器和 2.6cm 的圆柱型霍尔推进器已经被测试。实验得到的结果显示离子加速发生在圆柱形区域,在 2.6cm 的圆柱型霍尔推进器之中,在 50-300w 的工作条件下,其工作效率可以达到 15%~32%,推力可以达到 2.5~12mN,并且两款圆柱形霍尔推进器都体现出了比较高的离子电离效率,这说明了二次及以上电离的离子存在。并且,尽管磁场分量的最大值出现在了圆柱型霍尔推进器的环形区,但是大部分的电势降落出现在了圆柱区域。同时在羽流中观察到了明显的电势降落,这说明了相对于传统的霍尔推进器而言,圆柱型霍尔推进器在羽流中的磁场明显偏弱。另一个非常重要的现象就是在推进器的轴向上出现了比较明显的等离子体密度峰^[2]。

实验的结果已经从现象上揭示了一些圆柱型霍尔推进器的特性,但是由于一些离子电子层面的运动机理难以由探针来进行探测,而这些机理又对推进器的工作状态具有极大的影响,并且如果利用探针探测可能会破坏已经存在的等离子体工作状态,所以我们必须采用其他手段来对这些机理进行深入的研究。理论推理和数值仿真的混合是目前比较适合于研究这些机理的方法。

目前,国内外已经有多家研究机构采用了数值仿真的手段对于圆柱型霍尔推进器进行研究,其中来自美国 Princeton 大学的 PPPL 实验室,法国的实验室,以及中国的哈工



大的研究者在不同的方面做出了一些成果。

来自美国 Princeton 大学的 A. Smirnov^[2]等在 2003 年对圆柱型霍尔推进器的放电通道进行了仿真,其研究目的在于利用数值仿真探索了解何种数量级的电子交叉场效应可以解释观测到的放电室电离电流以及何种物理机制可以解释观测到的在推进器轴向上的等离子体密度尖峰。A. Smirnov 等人利用了直接粒子仿真模型,采用了蒙特卡罗法来处理碰撞。在其研究中采用了 3D3V 的方法对于粒子轨道进行追踪,同时其碰撞模型中包含了电子与原子的碰撞,与壁面的碰撞,由于电场波动产生的反常现象等几种。其对于离子的仿真与电子分开,只考虑了电场的影响,并且没有考虑碰撞。其研究结果表明,最大电子密度出现在在通道的环形部分,该密度不随着 K_b 而改变。电子反常碰撞频率应该大体上保持在跟波姆参数大致相同的数量级 $\nu_B \approx \omega_c / 16$ 上,这说明了由于电场波动产生电子散射在 CHT 中应该比传统的霍尔推进器更高。电子壁面作用对于交叉场的作用并不明显但是会导致电子分布函数呈现双麦克斯韦分布。而等离子体尖峰的出现则主要由于快离子流的存在。

2007 年,来自法国的 L. Garrigues^[3]等对于微型圆柱型霍尔推进器采用了二维的混合模型进行了仿真。其研究目的在于利用仿真手段与实验数据进行对比,同时考虑到二价离子的存在,对于通道电势降落位置以及电离主要发生的位置和工质利用率进行了研究。该研究采用了二维混合模型。对于离子的仿真采用了 PIC 方法,对于二价电离的离子考虑进内,但是与一价电离离子采用了相同的处理方式。三价及三价以上的电离离子被忽略。同时在计算时候假设电子处于麦克斯韦分布。对于电子则建立了流体模型,考虑到了碰撞和电子交叉场效应的存在对于磁动量项进行了修正,通过数值求解一个联立连续及动量方程而得的椭圆型方程得到电子电势分布。他们证实了主要的电离过程在霍尔推进器的放电通道中发生,而异常的推进剂利用率是由于存在着二价电离的离子。

2015 年,哈工大的高园园等对于微型圆柱霍尔推进器进行了研究。他们利用了 PIC-MCC 方法对于微型圆柱形霍尔推进器进行了研究。其主要研究目的在于考察变工况下推进器通道内的等离子体运动变化。仿真中采用了二维模型,初始的电子及离子分布采用了沿着轴线半麦克斯韦分布的模型。在对于磁场的处理,忽略了自身贡献的磁场,利用其他软件事先生成了磁场的模型导入了模拟的代码之中。在对于电子交叉场输运现象的研究之中,考虑了电子与原子之间的碰撞,电子与墙壁之间的碰撞和波姆散射现象。



仿真技巧上修改了电导率和采用了超粒子法。其研究表明：在使用了低流量的工作条件下，电子主要聚集在内部的环形区域周围，流量的增大促进了电子向阳极的传导，使等势线向轴线及出口方向移动，促进了电离区的和加速区的分离，提升了通道内的离子能量。

通过对于文献的调研，可以发现虽然已经有了前人的研究，但是我们对于微型圆柱形霍尔推进器的物理机制仍然不是很明确。并且大多数研究都没有关注到磁场的变化对于推进器工作效率变化的影响。因此，确定利用数值模拟的手段对于圆柱型霍尔推进器在不同的磁场下的工作效率变化进行研究。

1.3 数值方法

本次毕设准备利用理论与数值仿真相结合的方法，设计 PIC 程序，对圆柱形霍尔推进器的放电室在不同磁场的机理进行研究，并根据研究结果对比实验结果对于磁场结构进行优化，提高推进器的工作效率。因此首先对于主流的数值方法进行介绍。

1.3.1 针对电推进的数值模拟方法及现状

目前主流的电推进器数值模拟方法可以根据模拟尺度及精细程度的区别分为一维、二维平面、二维轴对称、三维。按照拟合方法的不同则可以分为磁流体力学法。混合粒子流体法、全粒子动理学方法。

一维模型的主要优势在于模型简单，易于建立。主要进行定性的理论分析，说明新理论的可行性，建立新的理论模型。二维模型主要是分为 2D2V、2D3V 两种模型。其中 2D2V 模型即是二维平面模型。这种模型忽略了电子、离子的周向速度，而在电推进器之中磁场和周向速度之间会产生作用使得粒子受力发生改变，因此 2D2V 模型通常使用不多。2D3V 模型即所谓的二维轴对称模型。这样考虑粒子的二维运动，但是考虑周向速度，因此既能保证粒子运动的准确性，又能保证计算量不至于过大。

三维模型主要是分为两种，磁流体力学法和粒子法。由于三维问题计算量惊人，因此主流的大尺度问题基本上均采用磁流体方法。

磁流体方法是将等离子体中进行连续性假设，认为电子、原子、离子均为连续性的流体。但是由于电推进器之中粒子密度比较稀薄，考虑到分子平均自由程会由于粒子密



度的减小而增大。推进器的尺寸变小也使得特征长度减小。因为引入克努森数：

$$K_n = \frac{\lambda}{L} \quad (1.1)$$

根据定义，克努森数在 0.1 以下时必须采用稀薄气体假设，10 以上可以采用流体假设，0.1~10 之间则是过渡地带。由于流体假设在这里可能并不能完善的描述这个问题，因此采用了粒子模拟方法。

粒子模拟方法又分为混合和全动理学两种。混合法将离子、原子作为粒子处理，电子则采用连续性假设，视作流体。全粒子方法将所有粒子均视为粒子。由于这样带来了巨大的计算量，因此需要采用一些数值计算加速手段和假设。具体的内容在后文会进行叙述。

目前主流的方法是全粒子 PIC 仿真，计算域一般采用 2D3V。本文也采用了这样的计算设置。

1.3.2 本次毕设的工作安排

本次毕设准备利用理论与数值仿真相结合的方法，设计 Particle-in-Cell (PIC) 程序，对圆柱型霍尔推进器的放电室在不同磁场的机理进行研究以此对于程序可行性加以验证，并根据研究结果对比实验结果对于磁场结构进行优化，提高推进器的工作效率。具体的研究思路如下：

1. 在目前基础上阅读更多的参考文献，完善对于相关的基础理论的理解，继续查阅大量的有关工作原理、过程以及建模的资料，确定最优的总体思路和模拟方案。
2. 利用 C/C++语言进行编程，电场计算利用泊松方程，并且对其进行数值离散求取电场，磁场利用 Comsol 导入，粒子运动采用 PIC 方法进行跟踪模拟，利用链表储存粒子位置信息，并且动态管理内存占用，提高利用率。由于仿真域具有轴对称结构，采用 2D3V 的 PIC 对于放电室进行模拟。
3. 由于采用 PIC 方法来进行模拟，计算量是非常惊人的。考虑到目前的设备现状和实际情况，可以使用 Szabo 方法简化，改变真空电导率，调整电荷比率，可以达到简化计算量的效果。后期如果进展顺利可以利用并行计算的方法来减少计算时间，这样就可以采用更精确的条件限制。
4. 利用有限差分法计算区域内电磁场分布，从模拟域的通道出口位置均匀喷入电子，



模拟电子运动和它与中性原子之间的碰撞电离生成离子的过程，跟踪离子、电子得到它的密度分布，改变磁场分布对比图同条件下的电子、离子密度，传导电流，波姆电流等。

5. 总结结果，提出新的理论。

本次毕业设计的创新点在于创新性的将关注点投入到了不同磁场条件下对于圆柱型霍尔推进器的放电室模拟上，可以对理解圆柱型霍尔推进器的内部放电情况，提高效率有着很大的帮助。

1.4 本文章节安排

本文主要的章节安排如下：

第一章主要进行绪论和概括，介绍工作背景，提供国内相关研究的进展，指出本文的工作意义。

第二章介绍相关于圆柱型霍尔推进器的等离子物理理论，指出可行的研究对象，位第三章提供理论指导。

第三章介绍了相关的数值计算实现办法，指明了完成的有关于代码编写的工作。

第四章对于圆柱型霍尔推进器不同磁场位形下的不同物理情况进行了计算，并且对于结果进行了讨论说明。

第五章总结工作成果并且提供了下一步的方向。



2 电推进的等离子体理论及工作原理

电推进的主要工作原理是利用电磁场约束带电粒子的运动,通过设置不同的场,使得电子能够和原子充分发生碰撞,从而能够电离出离子,之后利用电磁场的作用力使得离子被反推出放电室,从而使得推进器产生了推力。因此,等离子物理理论对于指导研究电推进装置内部工作机理有着重要作用。本章对于几个常见的电磁型等离子推进器的物理机制做了简要介绍,并且以此指导第三章的程序设计。

2.1 电推进器中的电子运动与电子传导

在电推进器之中,电子的运动起到了重要的作用,因为电子极大的影响了电离率。电磁场对于电子运动的约束因此成为了研究电推进的一个重要课题。由于本文主要是利用圆柱型霍尔推进器验证程序正确性,因此选取霍尔推进器说明。根据文献数据,选取比较常见的等离子推进器,使得其电子温度、磁场强度、电场在通道出口处达到峰值。

首先引入物理量,拉莫斯半径 r_L 。拉莫斯半径即带电粒子在磁力线周围环绕运动的半径。为了考虑带电粒子是否受到磁场的影响,拉莫斯半径必须被计算。引入 Newton-Lorentz 方程

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) \quad (2.1)$$

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i \quad (2.2)$$

计算拉莫斯半径,可以得出拉莫斯半径的表达式。

$$r_L = \frac{v_L}{\omega_c} = \frac{m}{|q|B} v_L \quad (2.3)$$

v_L 是沿着切向的环绕速度。角速度 ω_c 又被称为环绕频率。我们可以利用热力学温度来估算切向速度的数量级。其数量级大概在 10^6 量级左右。那么可以算出 ω_c 的数量级是 10^9 量级。代入数据可以计算出 $r_{L,i}$ 的数量级是 10^{-1} 左右,而 $r_{L,e}$ 的数量级是 10^{-4} 。而推进器内部的放电室尺寸 10^{-3} ,与放电室特征长度进行对比,可以看出 $r_{L,i} \gg 1$,同时 $r_{L,e} \ll 1$,利用选取的推进器的实验数据可以估算出电场、磁场力:



$$F_{\text{电场}} = qE \approx 5 \times 10^4 \times q \quad (2.4)$$

$$F_{\text{电子磁场}} = qv_e B \approx 3 \times 10^5 \times q \quad (2.5)$$

$$F_{\text{离子磁场}} = qv_i B \approx 1 \times 10^3 \times q \quad (2.6)$$

根据上述几个式子的分析可以看出,离子所受的电场力比较大,所受的磁场力远小于所受的电场力。同时,由于离子质量比较大,所做的主要是平行于轴线的定向运动,根据 Lorentz 定理,离子所受的磁场力垂直于速度所在的平面,而电子由于所受的电场力与磁场力量级相近,故而同时受到二力的影响,会在电磁场中做导心运动。由于电子的运动方向在不断的放生改变,故而所受的磁场力是不断改变方向的。离子所受的磁场约束运动很不明显,几乎可以忽略不计。在这里使用了推进器的放电室尺寸长度作为特征长度,而不是传统使用的放电室半径作为特征长度,这是由于轴向运动对于电子传导有比较明显的影响。

利用通道出口出口处的准中性法则,利用欧姆定律可以计算出电子运动速度和电场之间的关系。此时可以将该式写成另一种形式

$$\vec{v} = \mu \vec{E} \quad (2.7)$$

这里引入了一个全新的变量,即电子传导率。在含有磁场的等离子体之中,这个 μ 是一个张量,因此可以将其写作两个分量式:

$$v_{\perp} = \mu_{\perp} E_{\perp} \quad (2.8)$$

$$v_{\parallel} = \mu_{\parallel} E_{\parallel} \quad (2.9)$$

在垂直方向上,速度是粒子环绕中心沿着磁力线移动的速度。 μ_{\perp} 的值可以在已知等离子体密度的情况下被估算。在 $n_i = 10^{17} m^{-3}$ 的情况下,飘逸速度 $v_{\perp} = 25 \text{ km/s}$, 那么可以估算得到传导率大概在 1.7 左右。

然而这样的结果无法和理论推导得到的数据吻合。在没散射项和能量损失时候,垂直漂移速度理应等于 0。传统意义上认为电子之间的碰撞导致的散射是电子输运的主要成因。那么根据传统理论可以得到的结果是

$$\mu_{\perp} = \frac{\mu_{\parallel}}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \quad (2.10)$$



这个结果预测的值和实验结果之间存在偏差。大量的实验数据表现了偏差的存在。国内外研究者目前根据实验结果预测反常传导与空间位置之间存在着非线性的关系。该课题也成为了科学家们研究的重点。

在本文的仿真之中，由于采用了二维轴对称模型，故而没有周向分量，也就没有周向的电场。故而可以计算出轴向漂移速度为 0。为了使仿真满足物理事实，一般采用电子传导模型来修正电子中心漂移。通常使用的是 Bohm 传导电子漂移率。

Bohm 电子漂移率可以利用如下式子表达：

$$\mu_{Bohm} = \frac{\alpha_B}{16B} \quad (2.11)$$

在对于霍尔推进器的 PIC 仿真中，为了拟合 Bohm 传导，将传导等效为另外一种碰撞，通过定义一种全新的 Bohm 碰撞频率来进行计算，该频率：

$$v_{Bohm} = \frac{\alpha_B}{16m} qB \quad (2.12)$$

参考刘祺论文^[4]结果，本文将“Bohm 碰撞”的处理与弹性碰撞类比，仅使电子的速度方向和碰撞频率表达式不同。

Bohm 传导的确切机理目前还不完善。其成因比较复杂，利用实验测试很难获得准确的传导率数据。经典的结果中 α_B 认为是 1。但是之前的研究表明，该参数不能普适的应用于模拟之中。目前采用理论公式、半经验数据拟合、实验得出了一些初步的结论，列成了下表。

表 2.1 反常传导理论

研究时间	研究者	反常传导理论
2001	Szabo ^[5]	$v = v_e + v_{Bohm}, v_{Bohm} = \frac{qB}{64m}$
2002	Hagelaar ^[6]	通道内：近壁传导；通道外：Bohm 传导 $v_{Bohm} = \frac{qB}{16m}$
2006	Boniface ^[7]	通道内外是同一种传导模型，只有 Bohm 传导
2014	Szabo ^[8]	放电通道内 $v_{Bohm} = \frac{qB}{200m}$ ，通道外 $v_{Bohm} = \frac{qB}{64m}$
2015	Shinatora ^[9]	有效频率 $v_{eff} = \max(v_{classic} + v_{Bohm})$



本文参考刘祺^[4]的办法，使用 Szabo 所在使用的 Bohm 传导系数。

2.2 粒子之间碰撞

粒子之间的碰撞在等离子体模拟之中具有非常重要的作用。粒子之间的碰撞使得能级发生变化，从而产生电离、结合等多种情况。这会影响到电离过程、电子传导、以及推力表现。

在碰撞过程之中，会产生一价离子、二价离子、多价离子，一次电子、二次电子等等。由于多次离子的电离所需要的能级比较高，同时所需要的条件非常的苛刻，所以产生的多价离子相对于其他种类的离子来说数量非常的少。为了减少计算量，在这里将其忽略，本文中只介绍到二次电离。

2.2.1 原子-原子碰撞

原子与原子之间的碰撞，不会产生新的电子或者离子，没有电离激发，是最简单的一种碰撞模式。这种模式的碰撞是弹性碰撞。这种模式的碰撞会影响到整个计算域中原子密度的分布。本文中的模拟为了简化计算量，采用了 Comsol 设定原子背景密度的方式。因此不需要考虑原子-原子相互碰撞。

2.2.2 电子-原子碰撞

电子与原子碰撞是霍尔推进器中的电离的主要微观过程。电子与原子碰撞根据能量不同可以分为弹性碰撞（原子、电子之间没有能量损失）、激发碰撞（原子电子的动能一部分转化为电子、原子得不得能量）、电离碰撞（激发出新的电子和离子）三种。根据图 2.1 可以看出，电子与原子的碰撞截面受到电子入射时候的能量影响很大，而碰撞频率是碰撞截面相关的函数。因此考虑到这个，可以说电子的入射能量对于碰撞类型的选取影响非常大。对于常用的工质氙气而言，第一阈值是 8.35eV，超过该值以后会发生激发碰撞，而第二阈值是 12.1eV，超过该值会发生电离碰撞。

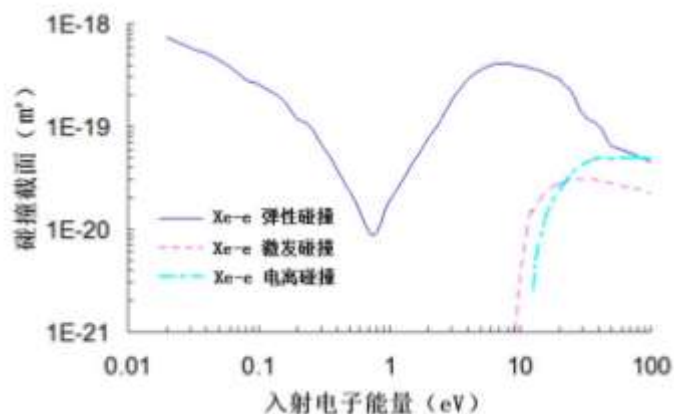


图 2.1 氙原子与电子的碰撞截面与电子能量的关系曲线^[10]

2.2.3 离子-原子碰撞

这种碰撞主要分为了两种。弹性碰撞和 CEX 碰撞（电荷交换碰撞）。CEX 碰撞是速度较快的离子和速度较慢的原子，发生了捕获，两者交换了电子，使得能量发生了改变，原来的快离子变成了快原子，原来的慢原子则失去了电子变成了快原子。入射离子能量与碰撞界面成反比。

2.2.4 电子-离子碰撞

电子和离子的碰撞是产生二价离子和多价离子的主要来源。电子与离子的碰撞结合比较复杂，依据碰撞时候是否损失能量和能量损失多少可以分为库伦碰撞、三体结合和与之前提到的类似的激发碰撞、电离碰撞。本文中所采用的模拟中考虑了二价电离碰撞和三体结合碰撞。图 2.2 是氙离子与电子碰撞中碰撞截面与电子能量的关系。

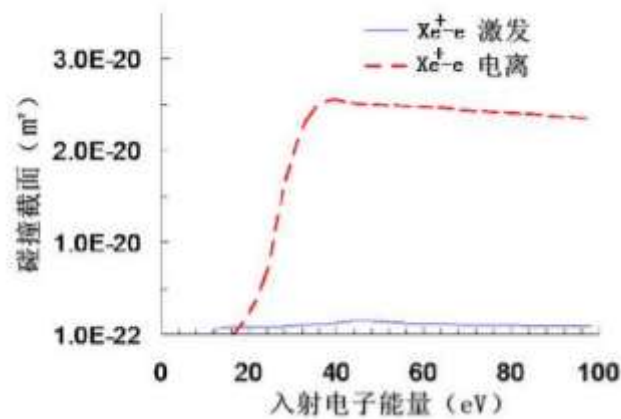


图 2.2 氙离子与电子的碰撞截面与电子能量的关系曲线^[10]

第三章会详细介绍相对于各种碰撞类型的具体的计算办法。

2.3 几种电推进器的特有物理问题

上文论述了电推进装置的两部分基础理论。这里选取几种比较特殊的电推进器说明一些该类型电推进器特有的物理问题。

首先介绍被发展最早的离子推进器。在离子推进器中，放电室内主要含有如下五种粒子种类：原初电子、二次电子、一价离子、二价离子，原子。在放电室内部，不同的物理特性被利用不同的参数所表达。根据文献^[14]中所叙述，主要的两个物理参量为放电室推进剂利用率以及推力效率，其中的放电室推进剂利用效率：

$$\eta_{prop} = \frac{I_B}{I_{neutral}} = \frac{(I_B^+ + I_B^{++})m_{ion}}{(m_{main} + m_{cathode})|e|} \quad (2.13)$$

其中的推力效率：

$$\eta_t = \frac{T_{actual} I_{sp} g}{2P_{IN}} \quad (2.14)$$

事实上，这两个物理参量说明了离子的微观表现和整个推进器的宏观表现有着非常大的联系。

另一种比较值得探讨的就是霍尔推进器，下面对于目前常见的两种霍尔推进器的独特物理特性进行说明。传统的圆环型霍尔推进器在小型化时候会由于其迅速增大的表面积-体积比和难以缩小的磁环而产生困难。根据目前现有的文献，普林斯顿大学的 2.6cm CHT 可以用来说明两者之间的主要区别，因此利用 2.6cm CHT 的数据来进行结论的梳

理。

普林斯顿大学对于离子流和推力的测试表明了圆柱型霍尔推进器的推进剂电离率比传统的圆环型霍尔推进器大大提高。图 2.3 产生这个现象的原因可以被定性的解释为，在圆柱型霍尔推进器之中，具有比较低的表面积-体积比，同时在圆柱型霍尔推进器的向外喷射的离子流中可以观测到更多的多价电离离子，这可能导致了离子之间的复杂关系和在放电通道之内的更长的停留时间。

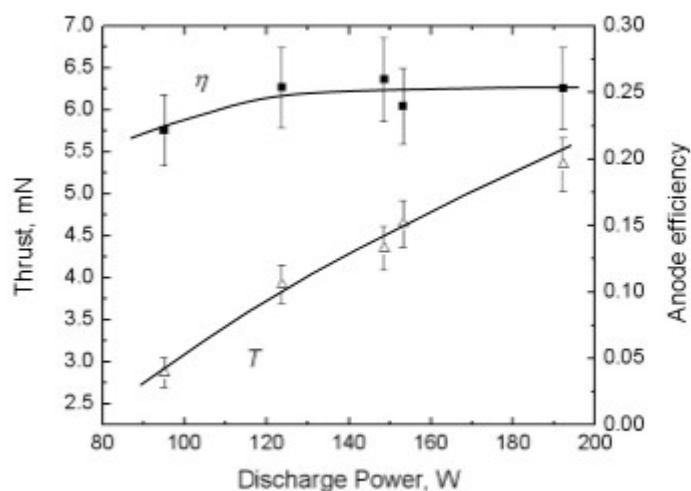


图 2.3 电离功率与阳极效率之间联系^[1]

圆柱型霍尔推进器的电离特性和传统的圆环型霍尔推进器存在着类似的关系。但是在圆柱型霍尔推进器之中电离过程能级更低，同时随着直径的增大，其电离能级会得到提高。

关于推力和推进效率的测量，普林斯顿大学的研究者通过实验测量表明在输入的功率范围在 50-300W 之间时候，两种推进器存在着相似的推进效率和推进力。CHT 在 100W 左右的输入功率时候可以利用 25%左右的输入能量给阳极。随着输入的能量提高到 200W，其阳极工作所需要的能量仍然是保持几乎不变。同时普林斯顿大学对于推进器寿命的研究表明，圆柱型霍尔推进器比传统的推进器具有更长的工作寿命。

另一个非常有趣和新颖的特性是，圆柱型霍尔推进器在 200V 左右仍然能够维持低流量推进剂输入的稳定电离，但是同样工况下的圆环型霍尔推进器在该工作情况下则难以做到这一点。而目前低流量输入具有巨大的需求，普林斯顿大学的研究者指出，只有



在特定的离子离开速度以下，特殊的散射才能发生，而特定的离子离开速度可能会要求低流量。对于小卫星而言，200V 以下的电压不难获得，因此可以有效的驱动电推进装置。更低的流量可以为以后制造更小的圆柱型霍尔推进器留下理论和工程经验基础。

2.4 本章小结

本章主要介绍了电推进器的几种物理原理，方便理解电推进器之中的物理机制，主要介绍了电子传导，碰撞机理和不同类型电推进器特有的物理性质。



3 PIC 仿真数值方法

根据前文所述,目前对于电推进器的内部物理情况了解的并不是很清楚确切。因此目前主要采用实验测量的方式测量数据。但是由于等离子体的特性,利用探针进行测量可能会导致破坏等离子体的工作状态,因此采用数值计算来进行研究成为了另一个主要的研究手段。相对于实验,数值计算具有时间段、投入小的特点。

本文的第二章已经对于电推进器的基本物理理论进行了介绍,第一章夜间要提到了几种主流的数值计算手段。本章将从具体的数值实现角度对于电推进器的 PIC 建模进行分析,并就一些具体问题进行总结和解释。同时,考虑到本文选取的 PIC 算法计算量极大,在毕设时间允许的情况下,本文实现了电场计算部分的并行化,对于前人的算法进行了验证,这部分内容也会在本章予以介绍。

3.1 全粒子-网格法(Fully-PIC)介绍

本文采用了带有空碰撞的全粒子-网格法,前文已经提到了这种方法,同时计算域采用了二维轴对称设置。Fully-PIC 方法是一种介于全部是粒子法的 DSMC 法和连续性假设流体方法 MHD 之间的方法。其基本计算对象是粒子,粒子由带电粒子和中性粒子构成,通过对于粒子追踪来计算结果。但是考虑到了计算量的问题,采用了类似于 CFD 方法的欧拉网格法求解麦克斯韦方程(实际上简化为泊松方程,近年来也有简化成安培方程的文献),因此说 PIC 方法是介于 DSMC 和 MHD 之间的方法,具有计算准确,计算量折中的有点。然而尽管相对于 DSMC 方法,计算量已经小了很多,但是目前的计算量仍然是计算机难以承载的,因此,之前的研究者,提出了许多加速计算的技巧,具体的加速技巧会在本章 3.9 节进行详细叙述。

CFD 之中利用设置源项来表示反应速率或者是添加附加项,利用这样的办法引入了外界对于流体的影响。但是在 PIC 法之中,仅能表示粒子在电磁场之中的运动,而为了表示电离过程,必须引入碰撞过程。在本文所用的数值模拟方法之中,为了减少一部分计算量,采用了空碰撞方法,这种方法是由 Birdsall^[12] 在中所述。

利用 PIC 方法计算等离子体的具体步骤可以见下图。首先设置全局变量和设置初始参数。需要设定网格大小、时间步长、权重以及由外部输入的磁场。之后程序进入主循

环，由于本模拟之中为原子设定了背景分布，因此直接注入电子，随即计算电磁场，计算运动，处理碰撞。通过计算域之内的总粒子数来决定是否程序收敛。具体的图片见下。

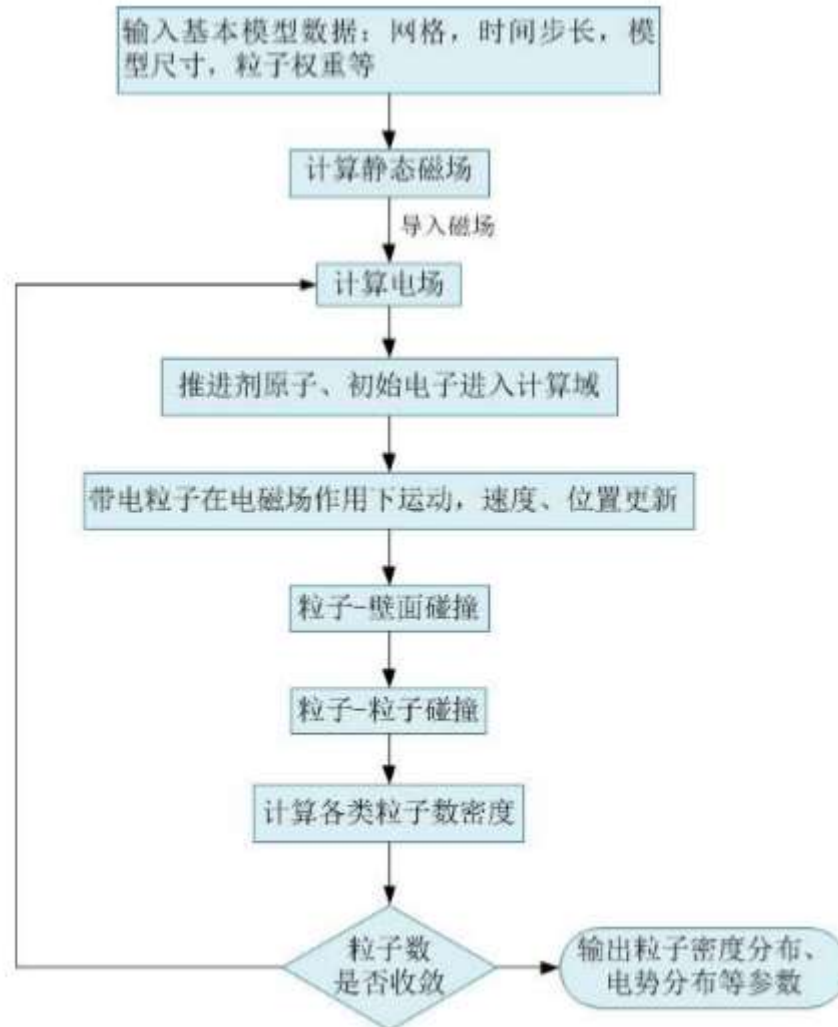


图 3.1 等离子仿真具体步骤^[10]

3.2 计算域及网格

本文所计算的霍尔推进器是本实验室正在实验测试的圆柱型霍尔推进器，仿真的主要区域是放电通道（放电室）及推进器后的一部分羽流区。由于霍尔推进器的放电通道具有轴对称的特性，因此选用 2D3V 模型进行计算，选用的计算域为截取的 R-Z 平面，是二维轴对称计算域。图 3.2 是选用的计算域模型图，包含了一部分羽流区域为了更好的观测粒子的发散和场外的运动，也可以方便计算对比通道出口处的一些物理现象。

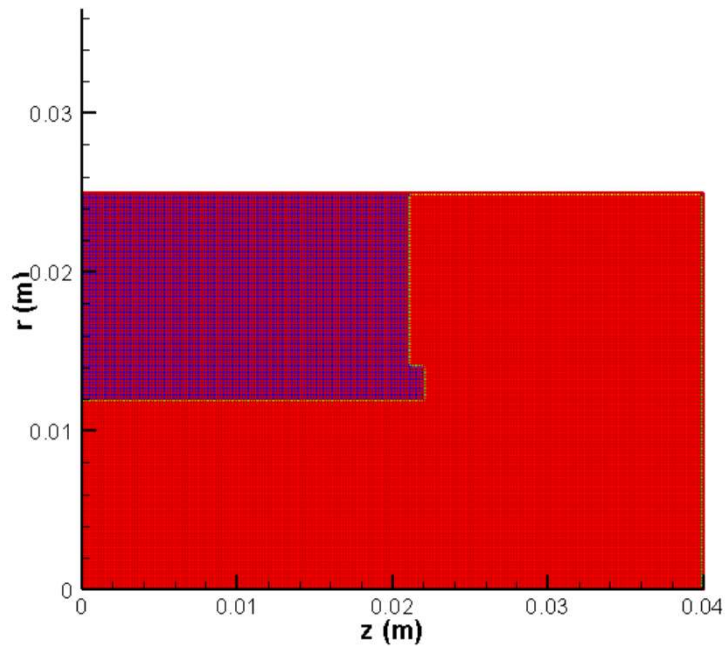


图 3.2 计算域示意图

如图 3.2 是计算区域。计算域的水平方向是 Z 轴，也是整个推进器的轴向方向，轴向上整个计算域选取了最大长度为 0.04m。在径向方向上是 R 轴，选取的最大长度是 0.025m。计算域中根据实际的放电通道结构设置了陶瓷部分。陶瓷部分和外壁已经在计算域之中标黑。放电通道长 0.022m，半径 0.012m，计算域之中还包含有外磁极。外陶瓷厚度为 0.0024m，磁极长度 0.021m，高度 0.0106m，阳极的内径是 0.006m。

在网格的选取上，由于我们的 PIC 代码是显式迭代的代码，因此必须满足有限网格条件和 CFL 条件才能使得计算稳定。有限网格条件主要是限制了空间精度和空间步长，CFL 条件主要是限制了时间精度和时间步长。根据等离子体物理的定义，德拜长度是等离子体保持准中性的最小尺度，为了在模拟表征等离子体的行为，防止因为网格步长太大导致不稳定，一般设置网格长度小于德拜长度。这个就是空间稳定性条件。

德拜长度的计算式如下：

$$\lambda_d = \sqrt{\frac{\gamma^2 \epsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2}} \quad (3.1)$$

根据前文所述的稳定性条件，网格长度应该小于德拜长度，因此引入下式：

$$\Delta \leq \lambda_D \quad (3.2)$$

实际上前文所述的稳定性条件是由 Birdsall 在其著作中总结得到，实际上这几个条件都



只是必要条件，而不是充分条件。这就说明，即使满足了几个稳定性条件，计算仍然可能存在发散的可能。实际计算过程之中，我们注意到网格长度对于收敛性质的影响比较大，同时又对于计算的时间有着非常显著的影响。因此网格的选取成为了非常重要的一点。计算圆环形霍尔推进器的本实验室刘祺的论文中选用的网格条件是：

$$\Delta x \leq \frac{\lambda_d}{0.3} \quad (3.3)$$

实际上计算过程中，由于过密的网格数可能会导致计算量过大，因此需要数值加速手段。一种可行的方法是 MIT 的 Dr. Szabo 提出的真空介电常数法。这种方法之中，利用增大介电常数的方法，可以使得德拜长度变大，可以使得可以选择的网格长度变大。这样可以减少计算量。由于介电常数发生了改变，所以必须改变其他的一些物理量。采用了 Szabo 论文中的分析方法，如表 3.1：

表 3.1 真空介电常数增加 x^2 倍引起的参数变化^[4]

参数	符号/[单位]	变化倍数
等离子体振荡频率	ω_{pe}	$1/x$
德拜长度	λ_D	x
网格大小	Δ	x
时间步长	Δt	x
速度	v	1
电场强度	[E]	$1/x$
磁场强度	[B]	$1/x$

由于改变介电常数已经影响了物理实际，所以不能将其改变过大，否则会破坏等离子体的基本条件：宏观准中性。其他的加速手段会在本文的后半段进行叙述。

考虑了几篇相似文献的选取网格的选取办法以后，本文选取了 2×10^{-4} 作为网格长度，这样考虑到了计算域的大小，产生的网格数是 200×125 。

3.3 时间步长的计算以及选取

上文提到的两个稳定性条件中的 CFL 条件决定了仿真时间步长的选取。时间步长也影响了收敛的速度。时间步长应该考虑两种粒子。但是由于在霍尔推进器的仿真中，离子的运动相对比较慢，而且运动类型相对少，因此决定时间步长的主要因素是电子的几种运动。考虑电子的回旋频率和振荡频率。



根据 Birdsall^[12] 书中提到的条件, 时间的步长的选取应该满足:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\omega_{ne}} \quad \text{且} \quad \Delta t \leq \frac{1}{\omega_{ce}} \quad (3.4)$$

对于这两种时间步长进行估算, 电子振荡频率的计算公式:

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\gamma^2 \epsilon_0 m_e}} \quad (3.5)$$

而电子回旋频率的计算公式为:

$$\omega_{ce} = \frac{eB}{m} \quad (3.6)$$

根据本文的计算域的特点, 代入数值可以计算得到时间步长。然而同空间步长的稳定性条件一样, 时间步长也是必要条件而不是充分条件, 因此时间步长的选组也是比较有技巧的。本实验室李敏的论文中采用的时间步长稳定性条件是使频率与时间的乘积小于 0.5, 其物理意义就是一个时间步长内的粒子运动不能超过网格长度的一半。本实验室刘祺的论文中选取的是乘积小于 0.1, 综合考虑各种因素, 本文选取的计算时间步长为 2.0×10^{-12} , 其中离子由于运动比较慢采用了每 50 个时间步长推动一次的方法, 选取了专门的时间步长 1×10^{-10} 。

3.4 电场、磁场的计算及边界条件设置

3.4.1 磁场计算基本原理

本文所使用的 PIC 代码是静电式 PIC 代码 (Electrostatic-PIC) 代码, 因此在我们本文的计算中采用了利用 Comsol 计算磁场然后导入计算程序的方法。SPEPL-CHT 的磁场采用的是利用外部的永磁体产生附加磁场。然而根据麦克斯韦方程, 只要电磁场中存在有定向运动趋势的带电粒子, 就会感生出感生磁场, 如果考虑这部分磁场, 那么就是电磁式 PIC 了, 但是放电室内的等离子体所产生的定向电流非常小, 那么根据计算的允许误差, 可以忽略这部分磁场, 因此利用静电式 PIC 代码也可以在误差允许范围内计算得到可信结果。磁场可以利用 Comsol 等商业软件利用有限元软件计算以后作为初始条件输入, 并且在整个计算过程中保持不变。具体的求解基本原理见下:



$$\bar{H} = \frac{1}{\mu_0} \bar{B} + \bar{H}_c \quad (3.7)$$

$$\nabla \bar{B} = 0 \quad (3.8)$$

$$\nabla \times \bar{H} = 0 \quad (3.9)$$

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} \quad (3.10)$$

根据上述麦克斯韦方程可以进行消去：

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \bar{A} + \bar{H}_c \quad (3.11)$$

故而可以得到：

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \bar{A} + \bar{H}_c \right] = 0 \quad (3.12)$$

利用有限元方法可以得到分布。本实验室李敏的毕业论文中有具体的有限差分法实现，可以作为具体的数值方法实现。

3.4.2 电场计算及边界条件

3.4.2.1 电场计算

电场的计算采用麦克斯韦方程来计算。但是由于计算域和实际物理情况耦合，再忽略掉误差范围内可以被忽略的项，实际上可以简化为对于一个方程的求解。目前常见的文献中主要是利用泊松方程或者是利用安培方程。安培方程是 LANL 实验室的 G.Chen^[6]在其新颖的隐式求解 PIC 算法中使用，实际应用到我们的代码中存在困难，因此采用了泊松方程求解静电方程的方式求解。

实际上，根据电动力学，电场和电势之间存在着函数关系：

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (3.13)$$

同时，根据散度定理，电场与电荷之间存在着这样的关系：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.14)$$

根据电荷守恒定律，对于电荷有这样的关系：

$$\rho = e(n_i - n_e) \quad (3.15)$$

那么可以推导出泊松方程:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{e}{\varepsilon_0}(n_i - n_e) \quad (3.16)$$

在二维轴对称坐标系下, 这个方程可以被写作如下的形式:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{e}{\varepsilon_0}(n_i - n_e) \quad (3.17)$$

离散为适合计算机求解的有限差分形式:

$$\frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta r} + \frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta z^2} = -\frac{e}{\varepsilon_0}(n_i - n_e) \quad (3.18)$$

求解以上的差分泊松方程可以采用多种方式, 在一些三维代码中采用了间断有限元方法^[15], 针对于二维代码主要采用有限差分法。为了加快计算, 需要选取最快速最适合的迭代方法。根据 *Mahlingam* 论文^[14] 中内容, 在 200*200 的正交性网格上, 一个简单的狄利克雷边界条件的问题, 达到 $L_{2norm} \leq 0.001$ 的要求下, 线性 GS 迭代法需要数千步, 而 DADI 算法只需要 15~20 步。因此考虑采用 DADI 作为求解电场的迭代方法。DADI 算法被称为交替方向隐式算法。这种算法的优势在于能够将大型矩阵转化为三对角矩阵进行求解, 从而能够大大减小计算难度。

早期研究者们主要用 DADI 方法来研究传热问题。在之后应用数学研究者的文献中^[13], 研究者考虑到泊松方程为椭圆方程的性质, 选择了为泊松方程添加了一个虚拟的时间项。那么原本的泊松方程可以被写作如下形式:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla^2(\varepsilon \phi) = -\rho \quad (3.19)$$

根据 *Birdsall*^[12] 一书中的内容, 对于拉普拉斯算子的有限差分展开, 可写作如下形式:

$$\begin{aligned} \nabla^2(\varepsilon_a \phi) = & \frac{2\varepsilon_{a,i+1/2,j}}{\Delta z_{i,j}(\Delta z_{i,j} + \Delta z_{i-1,j})}(\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}) - \frac{2\varepsilon_{a,i-1/2,j}}{\Delta z_{i-1,j}(\Delta z_{i,j} + \Delta z_{i-1,j})}(\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}) \\ & + \frac{2r_{i,j+1/2}\varepsilon_{a,i,j+1/2}}{(\Delta r^2)_j \Delta r_{j+1/2}}(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}) - \frac{2r_{i,j-1/2}\varepsilon_{a,i,j-1/2}}{(\Delta r^2)_j \Delta r_{j+1/2}}(\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

具体的变量解释可以参考 Mahalingam 论文^[14]中的图片说明:

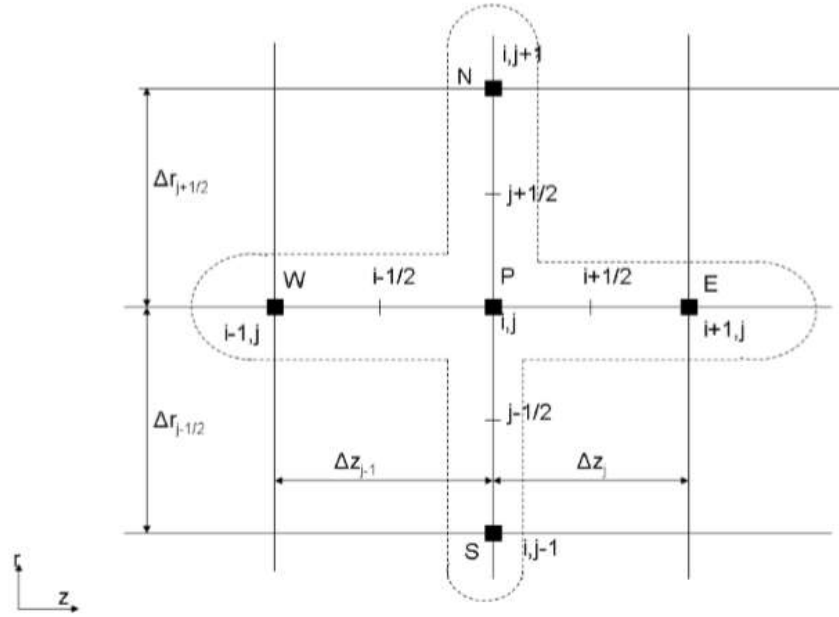


图 3.3 计算格式示意图

为了方便计算, 在计算中还将空间参数与介电常数整合成了独立的变量, 这些变量不仅适用于简化计算表达, 同时还非常方便后面设置边界系数。这几个参数分别是:

$$a'_{E,i} = \frac{2\varepsilon_{a,i+\frac{1}{2},j}}{\Delta z_{i,j}(\Delta z_{i,j} + \Delta z_{i-1,j})} \quad (3.21)$$

$$a'_{W,i} = \frac{2\varepsilon_{a,i-\frac{1}{2},j}}{\Delta z_{i-1,j}(\Delta z_{i,j} + \Delta z_{i-1,j})} \quad (3.22)$$

$$a'_{P,i} = -(a'_{E,i} + a'_{W,i}) \quad (3.23)$$

$$a'_{N,j} = \frac{2r_{i,j+\frac{1}{2}}\varepsilon_{a,i,j+\frac{1}{2}}}{(\Delta r^2)_j \Delta r_{j+\frac{1}{2}}} \quad (3.24)$$

$$a'_{S,j} = \frac{2r_{i,j-\frac{1}{2}}\varepsilon_{a,i,j-\frac{1}{2}}}{(\Delta r^2)_j \Delta r_{j-\frac{1}{2}}} \quad (3.25)$$

$$a'_{P,j} = -(a'_{N,j} + a'_{S,j}) \quad (3.26)$$

有了这几个参数以后, 可以将原来的泊松方程写作更加简单的形式, 如下:

$$\left[\frac{\phi_{i,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^k}{\Delta t_f} \right] = a'_{E,i}\phi_{i+1,j} + a'_{P,i}\phi_{i,j} + a'_{W,i}\phi_{i-1,j} + a'_{N,j}\phi_{i,j+1} + a'_{P,j}\phi_{i,j} + a'_{S,j}\phi_{i,j-1} - s_{i,j} \quad (3.27)$$

接下来针对 Z 方向和 R 方向分别做迭代,也就是所谓的交替方向。隐式求解是因为根据上面的示意图可以看出,实际求解过程中要用到信息还未知的两个点。这样的五点格式在经过了交替方向的变换以后,可以在每个方向上变成三点格式,这样就可以写作三对角矩阵,可以利用托马斯算法进行求解。式子可以写作:

$$a_{E,i}\phi_{i+1,j}^{k+1/2} + a_{P,i}\phi_{i,j}^{k+1/2} + a_{W,i}\phi_{i-1,j}^{k+1/2} = RHS_{i,j}^k \quad (3.28)$$

$$a_{N,ij}\phi_{i,j+1}^{k+1} + a_{P,j}\phi_{i,j}^{k+1} + a_{S,j}\phi_{i,j-1}^{k+1} = RHS_{i,j}^{k+1/2} \quad (3.29)$$

具体的参数设置可以参考 Mahalingam 的论文附录^[14]中的设置办法。

以上是 ADI 算法的具体解决办法。但是 ADI 的计算时间复杂度相对于高斯塞德尔迭代法并没有显著的降低,必须要加入动态时间虚拟步调整才嗯那个大大降低时间复杂度。实际计算过程中,需要首先执行两步完整的 ADI 计算,然后用 2 倍的虚拟时间步长进行计算得到校正所用的电势,之后计算时间调整系数,具体的设置办法:

$$L_{\phi_{diff}} = \|\phi_{i,j}^{k+1} - \bar{\phi}_{i,j}^{k+1}\| \quad (3.30)$$

$$L_{\phi_{error}} = \|\phi_{i,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^k\| \quad (3.31)$$

其中 $\bar{\phi}$ 是校正步所得到的电势,而 ϕ^{k+1} 则是两步 ADI 计算以后得到的结果。那么可以得到 TP 的计算结果:

$$TP = \frac{L_{\phi_{diff}}}{L_{\phi_{error}}} \quad (3.32)$$

随后即可计算调整虚拟时间步长。

3.4.2.2 边界条件

在 DADI 计算电场的过程中,我们注意到了边界条件对于计算结果影响极大。实际上计算过程中,边界条件的设置主要体现在上文提到的各个空间步长参数之中。

边界条件主要有三种,分别是狄利克雷条件、纽曼条件、还有混合边界条件。本文所用的仿真中这几种条件都用到了。

在上自由边界上,本文中的各个系数主要设置成了狄利克雷边界条件,也就是定值边界。而在右侧的自由边界上,也采用了第一类边界条件。实际上这两个边界还可以继续深入的设置一下,因为涉及到了羽流区的带电粒子的重新注入的问题,这个问题在

Joseph Wang 的论文以及 Ahedo 的论文中有提到。

在物理意义上代表阳极的左侧边界，采用了定制边界条件，在这里设置了电势等于实验数据的 300V 定值边界条件，其余不代表电极的数值网格点全部给定了值为 0。

需要特别注意的是左侧边界条件和陶瓷边界条件交接的角点。这里的点的边界系数中 awi 设置为 0，非角点的 anj ， asj 全部设置为紧邻的内部点一样的值。右边界处的 aei 设置为 0，其他的条件设置方式类同于左边界。阳极采用了定值边界系数，陶瓷部分采用了类推办法。

电势和源项的边界条件，在机身部分设置为了浮动电势，参考了 Szabo 的博士论文以及刘畅的博士论文以后选定了电容条件，将机身的电势等同于一个大型电容的电势计算。其余边界条件与参考文献中类似但略有不同，不做赘述。

3.5 粒子运动实现

本代码是一阶精度显式推进代码，故而运动模块也采用了显式推进的方法。电子在加入计算域时候已经具有了初始速度，而离子的产生主要是由于碰撞产生，所以产生以后也具有了速度，而粒子的速度改变已经位置更新则由 Newton-Lorenzo 方程决定。

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) \quad (3.33)$$

$$\mathbf{v}_{t+\Delta t} = \mathbf{v}_t + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Delta t \quad (3.34)$$

由于本文的仿真已经满足了两个稳定性条件，粒子一个时间步长内可以认为是匀速直线运动：

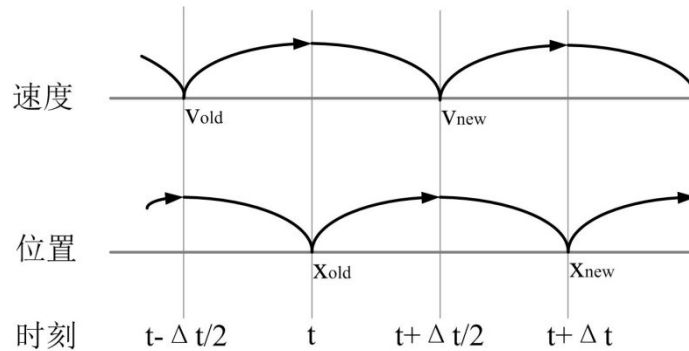
$$\Delta \mathbf{s}_i = \mathbf{v}_i \times \Delta t \quad (3.35)$$

$$\mathbf{s}_{t+\Delta t} = \mathbf{s}_t + \mathbf{v} \times \Delta t \quad (3.36)$$

计算过程中，如果同时采用同一个物理时刻的速度和位置坐标利用以上的两个方程进行更新，会导致计算存在误差，同时也不能保证符合物理事实。Boris 提出了“蛙跳”算法，也就是使用的速度和使用的的位置坐标之间更新时间相差半个时间步长，具体的实现方式：

$$m \frac{\mathbf{v}_{new} - \mathbf{v}_{old}}{\Delta t} = \mathbf{F}_{old} = q(\mathbf{E}_{old} - \mathbf{v}_{old} \times \mathbf{B}_{old}) \quad (3.37)$$

$$\mathbf{v}_{new} = \frac{\mathbf{s}_{new} - \mathbf{s}_{old}}{\Delta t} \quad (3.38)$$


 图 3.4 蛙跳格式示意图^[4]

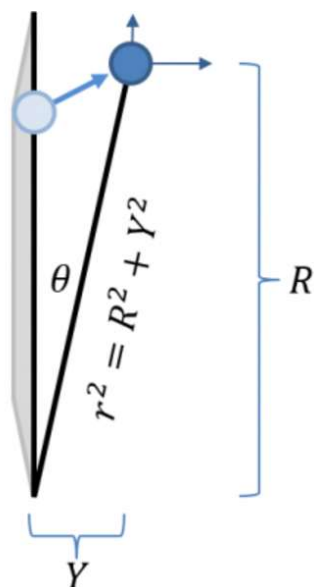
实际计算过程中，在 $t=0$ 时刻，为了使用 Boris 算法，必须向前推进半个时间步长，来预估出所需要的物理步长。具体的计算方法：

$$\frac{\vec{v}_i^{++} - \vec{v}_i^{--}}{\Delta t} = \frac{q_i}{2m_i} (\vec{v}_i^{++} + \vec{v}_i^{--}) \times \vec{B}^n \quad (3.39)$$

$$\vec{v}_i^{++} = \vec{v}_i^{--} + \vec{v}_i' \times \vec{t}_i \quad (3.40)$$

$$\vec{v}_i' = \vec{v}_i^{--} + \vec{v}_i^{--} \times \vec{t}_i \quad (3.41)$$

需要注意的是，由于我们采用的是 2D3V 的轴对称模型，所以计算速度时候要考虑到这一点。由于粒子具有着周向速度，在该速度垂直于平面的情况下，要考虑到粒子在垂直于平面方向上的位移在计算域平面上的投影表示。

图 3.5 投影方式示意图^[17]

引用 Dr. Lubos Brieda 的论文^[17]中的图片，可以生动形象的说明这一问题。解决这一问题的办法是对于实际的计算中要做一个坐标变换。具体的计算实现：

$$r = \sqrt{R^2 + Y^2} \quad (3.42)$$

$$\begin{bmatrix} u_r \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_r & -\sin \theta_r \\ \sin \theta_r & \cos \theta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_r \\ U_y \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

利用这两个变换以后就可以将原有的速度投影到计算平面上，可以方便进行下一步计算而不至于丢失位置信息。

3.6 粒子分布与入射

3.6.1 原子分布

本论文所采用的模拟中，为了简化计算量，没有采用 MCC 碰撞办法，也就是说不考虑计算域之中原子的运动，但是原子的分布是影响着电离室内的等离子电离。因此本文采用了 Comsol 计算的方式，按照半麦克斯韦分布的方式，将其密度提前计算出来导入到计算域之中。在整个计算过程中，原子的密度不发生改变。同时三体结合碰撞所产生的原子也不计入到背景原子分布之中。



3.6.2 电子入射

本文所采用的模拟方法中,对于电子的入射采用两段式入射方式的办法。所谓两段式指的是采用了两种入射函数这样做的原因是第一段采用的入射函数在实际仿真中和实验结果相对有误差,不能很好的拟合,第二种入射函数虽然能够比较精确的拟合出所需要的入射分布,但是其独特的算法导致了初始阶段入射的误差极大。因此采用了折中的办法,采用了两段式计算。具体的实现方式是离开右边界离子数达到 50 之前采用第一种入射分布,达到 50 以后采用第二种入射分布。下面会对两种入射函数做详细的介绍

3.6.2.1 电子入射位置

一般而言,霍尔推进器会在推进器放电通道外部设置空心阴极,但是空心阴极并不是本次仿真的主要内容。本文中的电子从右边界平面入射。有边界相对于放电通道来说比较大,因此电子入射位置对于计算结果的影响会比较大。麻省理工学院的太空推进实验室的 Dr. Szabo^[5]提出应该沿着自由边界设置一个电荷密度分布函数,这个函数的函数值与电子入射位置成相应的比例,这样可以保持羽流中的电中性条件。

在实际操作之中,具体的仿真实现方法是:

首先在程序中定义一个当地净电荷值,在自由边界处每一个网格之中统计计算离子(一价、二价离子)和电子的差值,并且遍历每个自由边界上的网格,找到含有净电荷最低的网格,再遍历一遍,找到每个网格的净电荷值和最低净电荷值之间的差,这就是所谓的当地净电荷值。之后遍历求和,就可以得到总的相对净电荷值。得到这个值以后可以计算相对比值,利用相对比值作为参考值,可以帮助决定电子入射位置。当这个相对比值数值比较大的时候,说明这个位置电子比较少,而离子比较多,为了保证电中性条件,可以引入比较多的电子。

实际的编程中,这样的操作难以得到实际实现。初始的几千步甚至几万步以内,达到右部自由边界的离子数比较少,这样计算得到的电荷量相差很少,也就导致了计算相对值的时候,难以产生较大的差异,而且初始的时候每步入射的电子数非常少,难以分配电子。为了解决这个问题,本实验室的刘祺^[4]采用了局部网格分配法,在她的论文中可以得到体现。本文没有采用刘祺的方法,采用了另外一种手段进行修正。本文的方法是采用了两段式入射函数法,引入了本实验室李敏毕业论文中的入射函数,进行前五



万步的电子入射与与预估校正。该入射函数的电子入射平面为出口平面(右边自由边界)。在 R 方向上满足随机分布,但在由内外壁面环绕成的环形面积上必须满足均匀分布。

3.6.2.1 电子入射速度

首先介绍第一种电子分布函数。Dr. Warner 的论文中提到了电子温度,他设置的电子温度是 10eV,但是他的论文中并没有具体设置入射电子位置。刘祺的论文中论证了这种设置方式的不合理性,在她的论文中提到了电子在这种入射条件下进行入射的话,会在羽流区就达到电离能,这样电离将发生在羽流区域内,这与实际的物理过程并不相符,因此刘祺认为这种入射并不合理。

参考 MIT 的 Dr. Szabo^[5]的设置方式,右侧自由边界处入射的电子的能量范围设置为落在 0.2eV~2.5eV 之间,具体的电子的能量认为由两部分构成,分别是电子的动能和热能:

$$E_e = \frac{1}{2} m_e \langle v \rangle^2 + \frac{1}{2} m_e (v - \langle v \rangle)^2 \quad (3.44)$$

根据 Szabo 论文中的设置方式,具体的操作之中设置了三种情况,分别是:

1. 电子发射位置的电子电势小于阴极温度时候,电子速度分布是半麦克斯韦分布,其中采用的参照温度是阴极温度。电子整体速度此时不包含在内。
2. 发射电子电势超过阴极温度下限大于阴极温度上限的三分之二的時候,电子温度以电势的三分之二为参考温度,速度进行半麦克斯韦分布。整体速度是 0。
3. 当电势大于阴极温度时候,电子按照麦克斯韦分布模式分布,其基础热能是基于基础热能 2.5eV 进行计算,整体速度按照公式计算给出,沿着磁场方向。

然后介绍射出右侧自由边界处离子数不超过 50 个时候的采用的入射方法。这里的入射方法引用自李敏的论文^[21]。

认为所有沿着右侧边界喷射进入通道的电子的初始速度都满足于半麦克斯韦分布。

$$v_z = v_{Maxwell} \sin \theta \quad (3.45)$$

上述公式中的 $v_{Maxwell}$ 为麦克斯韦速度, $v_{Maxwell}$ 的计算方法为:



$$\begin{cases} v_{Maxwell} = (-\ln(ranf))^{1/2} / \beta \\ \beta = \left(2 \frac{k}{m_e} T_e\right)^{-1/2} \end{cases} \quad (3.46)$$

其中 $ranf$ 为随机数, 分布范围在 $0 \sim 1$ 之间, T_e 为出口处的电子温度, θ 为随机角度, 在 $0 \sim \pi$ 之间随机分布:

$$\theta = \pi ranf \quad (3.47)$$

模拟粒子 r 各个方向的初始速度都设为 0

以上为两种电子入射速度的讨论。

3.7 粒子运动边界处理

本文研究的对象是 SPEPL 实验室的 CHT 推进器。在这个推进器的设计中, 采用了金属与陶瓷壁面结合的设计。因此在设计运动边界时候需要注意这一点。在本论文的计算过程中, 决定是否粒子是否触发边界条件的方法是: 判断粒子经过运动求解器后的位置坐标是否在边界以外。这是由于在满足了稳定性条件以后, 粒子在同一个时间步长的运动步长基本上小于网格宽度。同时应该注意到, 实际计算过程中的边界处理, 应该使得粒子在一个时间步长以内不会离开计算域太远。这是由于一些边界条件会设置为反射边界条件, 这样可能即使经过了反射边界条件, 还是在计算域之外, 这样就容易引发粒子奇异损失。虽然这部分粒子的信息仍然储存在相应的链表里面, 但是这部分粒子因为在计算区域以外, 将很难返回计算域。

3.7.1 电子与边界碰撞

电子抵达自由边界, 设置边界条件为删除链表内的节点, 物理意义是删除了电子。同时越出上自由边界也被处理为删除链表节点。虽然可能有羽流区电子经过外部磁场回旋作用沿着磁力线返回, 但是没有在这里体现, 这与本实验室刘祺的论文有区别。采取的是类似于西班牙 Ahedo 组的方法, 在羽流区自由边界处施加额外条件注入电子。运动到金属区域、竖直陶瓷、以及计算域左边界的电子直接在链表内删除了信息, 相当于粒子被吸收了但是没有累计电量。运动到对称轴边界上的进行反射操作, 这是由于具有对称性, 所以设置了这样的边界条件。运动到机身、放电室内壁的电子被设置为删除链表内信息但是统计电量。这是由于机身电势被设置为浮动电势, 利用这样的数值设置来拟



合物理实际。

3.7.2 离子与边界碰撞

离子的基本处理方法和电子几乎完全一致。需要注意的是本文中的仿真不含有离子碰撞金属壁面后获得电子中和为原子并再发射的情况，这是由于本文中原子的处理采用了作为背景密度的处理方法。

3.8 粒子碰撞实现

3.8.1 空碰撞法简介

在本文的模拟之中，考虑了电子与一价离子和电子与原子碰撞产生离子的情况。大多数文献对于这两种电离过程的计算采用的方法是 *MCC* 法，也就是蒙特卡洛碰撞法。在给定的时间间隔内，粒子之间的碰撞几率可被表示为如下的形式：

$$P=1-\exp(-\Delta t n_i v_i \sigma_t) \quad (3.48)$$

其中 n_i 表示背景粒子的数密度， v_i 表示目标粒子的速度， σ_t 表示粒子间的碰撞截面积，其值与目标粒子能量有关^[13]。

为了节省计算时间，Birdsall^[12]的书里提出了空碰撞的方法。具体的计算步骤如下：

(1)在已知了粒子的物理信息的情况下可以计算出最大碰撞频率 v_{max} ，即：

$$v_{max} = \max(n_i) \max(v_i \sigma_t) \quad (3.49)$$

(2)根据上述公式计算出在 Δt 时间发生空碰撞的几率：

$$P_{null} = 1 - \exp(-v_{max} \Delta t) \quad (3.50)$$

(3)从上面计算出的空碰撞几率和粒子种类可以计算发生碰撞的 N_{coll} ：

$$N_{coll} = N_{total} \times P_{null} \quad (3.51)$$

其中 N_{total} 为模拟粒子总数。

(4)计算 v_i ，也就是粒子的碰撞频率，然后根据程序生成的随机数与这个频率进行对比，满足某个范围的情况下就进入这个范围内的碰撞。

(5)处理每个满足了碰撞条件的粒子，然后遍历下一个粒子，在达到最大碰撞概率时候结束循环。

3.8.2 不同碰撞类型处理方法

来自北航 SPEPL 实验室的史肖霄已经详细总结了不同粒子之间碰撞类型的总结，本文在之前的第二章中也做了简略介绍。下面主要是对于几种碰撞在计算代码中的具体数值实现方法做一个简单的介绍。

3.8.2.1 弹性碰撞

弹性碰撞符合动量守恒原理，在碰撞前后粒子体系的总能量不发生改变，在这样的情况下，我们需要对于粒子的速度进行一个重新分配。

根据动量守恒定律和能量守恒定律：

$$m_e v_e + m_a v_a = m_e v_e' + m_a v_a' \quad (3.52)$$

$$\frac{1}{2} m_e v_e^2 + \frac{1}{2} m_a v_a^2 = \frac{1}{2} m_e v_e'^2 + \frac{1}{2} m_a v_a'^2 \quad (3.53)$$

联立两个方程，可以求解得到：

$$v_e' - v_e = \frac{2m_a(v_a - v_e)}{m_e + m_a} \quad (3.54)$$

$$v_a' - v_a = \frac{2m_e(v_e - v_a)}{m_e + m_a} \quad (3.55)$$

对其进行量级分析可以得到：重粒子速度变化量远小于电子速度变化量。所以认为可以忽略重粒子的动量变化，因此可行的处理方式是：重粒子的速度变化忽略不计，同时电子能量产生损失。也就是说只计算电子的速度变化。具体的能量变化：

$$\mathcal{E}_{scat,e} = \mathcal{E}_{inc,e} \left[1 - \frac{2m_e}{m_{Xe}} (1 - \cos \chi) \right] \quad (3.56)$$

$$|v_{scat,e}| = \sqrt{\frac{2|e|\mathcal{E}_{scat,e}}{m_e}} \quad (3.57)$$

3.8.2.2 电离碰撞

电离碰撞是等粒子推进器放电室中的放电过程的主要来源。主要发生在电子与原子和电子与一价粒子之间。当电子的如射能量超过第一电离能时候，可以发生电离碰撞。这个过程中会产生新粒子，同时会发生能量损失，也会有速度重新分配。

碰撞以后原本的入射电子的能量根据能量守恒定律可以认为是初始入射动能减去电离

能和二次电子发射能量:

$$\mathcal{E}_{scat,e} = \mathcal{E}_{inc,e} - \mathcal{E}_{se} - \mathcal{E}_{ionz} \quad (3.58)$$

之后对于原处电子的速度的分配方式跟前文所述的弹性碰撞相似,但是二次电子发射的速度分配按照下述公式计算能量:

$$\mathcal{E}_{se} = B(\mathcal{E}_{inc,e}) \tan \left[R_3 \tan^{-1} \left(\frac{\mathcal{E}_{inc,e} - \mathcal{E}_{ionz}}{2B(\mathcal{E}_{inc,e})} \right) \right] \quad (3.59)$$

得到能量以后就可以计算出二次电子的速度了。对于离子的速度分配,考虑到原子在本仿真中被认为是背景密度分布,因此计算时候离子速度分配服从按照原子初始能量为基底的麦克斯韦分布。其具体的速度分量分配方式满足 Brieda 论文^[17]中的分配方式。

3.8.2.3 激发碰撞

激发碰撞的物理本质是电子达到激发能量阈值以后碰撞原子,导致原子内部的电子能级升高,由于本仿真之中,对于原子的处理是按照背景分布处理,所以对于原子的能量不做处理,对于电子的能量是减去定值 8.35eV 的能量:

$$\mathcal{E}_{scat,e} = \mathcal{E}_{inc,e} - \mathcal{E}_{ex} \quad (3.60)$$

其余速度分配及分量处理与前文所述一致。

3.9 加速计算方法

前文已述, Fully-PIC 的计算量非常惊人。对于简单几何结构的放电室的几毫秒的计算过程可能要数周。如果完全按照原本的定义进行计算,那么计算量是无法接受的。在漫长的发展过程中,不同的研究者提出了不同的方法,对于计算进行简化。主要收到广泛接纳的方法分别是超粒子法、人工质量比法、人工介电常数法。人工介电常数法前文已经进行了简要的介绍,其他两种方法在 Dr.Szabo 的论文^[5]中也有详细的论述。由于重粒子质量比较大,在计算过程中相对于电子而言运动的非常慢,拖慢了计算速度,因此可以修改重粒子和电子之间的质量比,加快收敛速度。同时采用一个粒子胞代表较多粒子,这样也可以加速计算。



3.9.1 增大真空介电常数

在前文的讨论中，由于两个稳定性条件的存在，真空介电常数对于空间尺度和时间尺度上的离散有影响。一般来说设置的真空介电常数增大系数不小于 1，但是也最好不要超过 20。超过 20 的介电常数增大系数会使得仿真结果与物理实际出现偏差。

3.9.2 减小重粒子质量

选择减少重粒子质量的方法，会使得重粒子运动速度大大增大。但是由于改变了重粒子质量，其他的物理量会产生很大的变化，使得仿真结果和实际存在很大的误差。为了保证满足物理实际，必须使回旋频率和回旋半径以及粒子密度等等离子物理中的重要变量保证不变。为了达到这一目的，需要按照相应的比例需要改变一些参数：

表 3.2 使用减小重粒子质量的方法引起物理量的变化^[10]

物理量	变化前后比值
重粒子质量	f
质量流率	\sqrt{f}
碰撞截面	$\sqrt{1/f}$
离子的磁场	$\sqrt{1/f}$

磁场的变化仅仅适用于对于离子的磁场。但是由于离子基本不受到磁场的影响，所以实际计算中可以对磁场进行修正。

其他关于推进器物理变量的修正可以参考刘祺论文^[4]中的叙述，这里不做赘述。

3.9.3 超粒子元胞法

表 3.3 人工加速方法选取的参数^[21]

参数	取值
超粒子含真实粒子数（等离子体）	10^7



参考上表内容, 在计算中利用一个粒子元胞代表了大量的实际粒子。这样的处理可以大大加快计算速度。我们定义每个粒子元胞所代表的实际粒子数目为权重。

3.10 并行化电场求解

在使用了上文所述的一些加速计算的技巧以后, 计算速度仍然很难让人满意。因此众多研究者提出了将 PIC 算法并行化的思路。本论文中使用的 PIC 代码是在 SPEPL-SPT-PIC 的基础上经过大幅改进发展而来的代码。由于工作量和工作时间所限制, 新开发的 SPEPL-CHT-PIC 代码仍然是串行代码。为了提高计算效率, 验证并行计算可能性, 并且搭建实验室并行环境, 本论文进行了并行化的工作, 开发了本实验室第一套并行化代码。由于并行化 PIC 的工作量非常大, 本文主要完成了并行 PIC 计算的第一部分, 并行化 DADI 电场求解器的开发, 另一部分粒子运动求解器的并行本文进行了前期调研并且进行了初步的开发规划。这里主要介绍并行化电场求解器的工作原理。

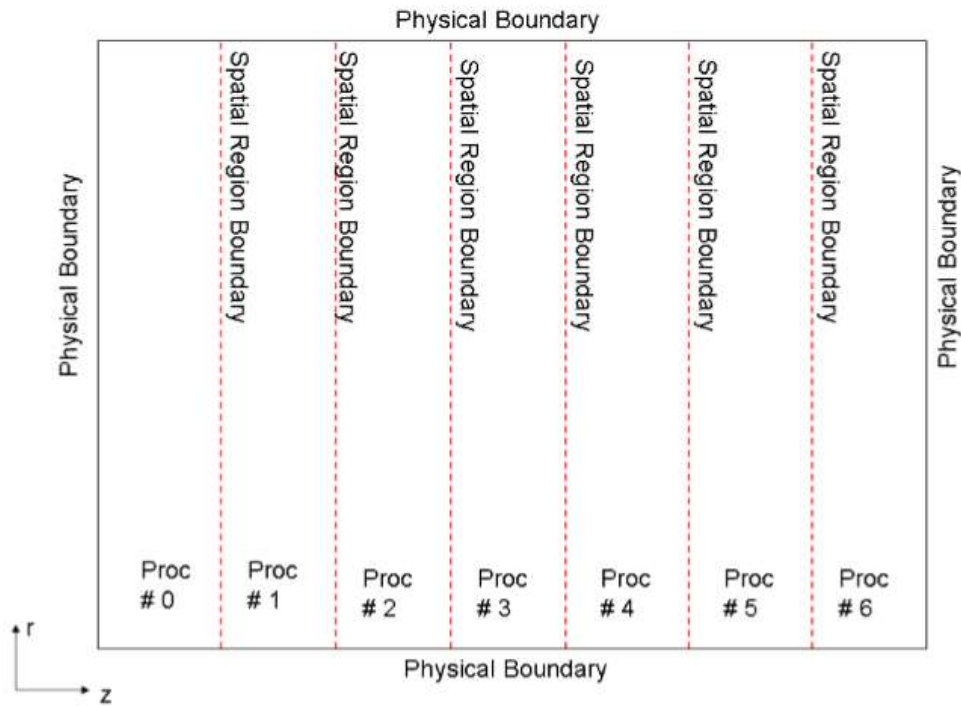
3.10.1 适用于并行算法的计算域划分

对于实现 PIC 并行化而言的第一步就是并行计算域划分。在本文中采用的区域划分方法是“一维”区域划分法, 也就是说对于计算域的划分只进行在轴向方向上。这种划分方法在 Mahalingam 的博士论文^[4]中有提到。对于本文中的电场求解, 计算域划分采用了一套独立的划分原则, 这是由于要加入对于计算必须的重叠区域。

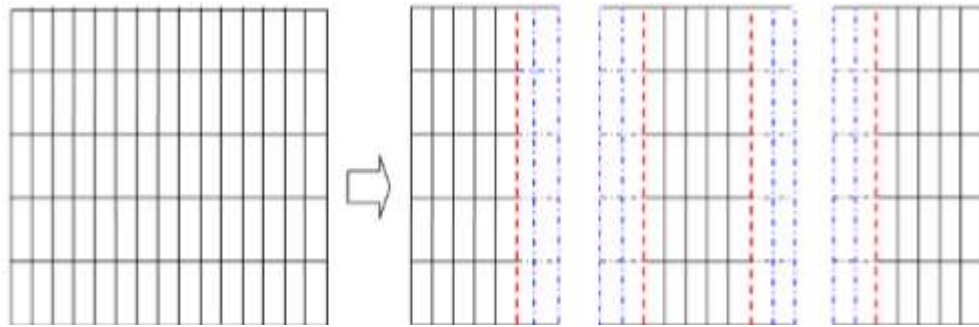
在计算区域的划分中应用了一种虚拟的边界条件, 成为空间区域边界。这种边界条件是一种两个相邻的处理器所拥有的计算域之间的公共边界。这个边界用来处理粒子在边界处的交换, 以及电荷信息的交换。总的 SRB 数目可以用下面的公式表示:

$$N_{SRB} = N_{proc} - 1 \quad (3.61)$$

引用 Mahalingam 论文^[4]中的图片, 可以说明这个问题。

图 3.6 SRB 说明^[14]

针对本文的并行化泊松方程求解器，这个并行化计算区域的划分方法要稍微做一些改变。需要在每个空间区域边界之间添加一些多余的重叠区域。这些区域用来交换信息，这样可以使得相邻区域之间的信息更加容易被相互交换。这种重叠区域越大，交换的关于计算所需的信息就越多，这就意味着收敛所需的步长就越少，但是这种处理方式也相应的带来了很多问题，过多的重叠区域可能会占用极多计算资源。实际上计算中，过多的空间区域边界重叠区域反而会拖慢计算，根据之前的研究者的研究成果，比较合适的是对于 100 列的数组，将其分割为 10~15 个计算区域。本文由于是验证性的计算，因此采用了 4 个处理器，这样整个计算域分割为了 4 部分。每个空间相邻边界之间设置了四列重叠边界，两列属于左侧处理器所包含的计算域，两列属于右边处理器所包含的计算域。

图 3.7 重叠区域说明^[14]

3.10.2 并行化 DADI 边界条件处理

在边界条件的设置上，要保证整个计算域的条件连续。在上下边界上不需要特殊设置边界条件。但是左右边界上要进行设置。这里设置为与左右相邻区域的计算域的相应数据列相等。还有注意的是，出于编程方便，在这里设置了位于最左和最右边界的两个计算域的左侧和右侧的处理器编号是空编号。

3.10.3 并行化 DADI 算法

具体的计算中，采用的数值算法参考了 Mahalingam 的博士论文^[14]中的工作。具体的计算过程如下：

1. 首先分配属于每个计算区域的局部数组。要考虑到这些数组都应该具有重叠区域。
2. 首先对于重叠区和边界处的数据列进行数据交换。
3. 进入迭代环节，执行第一步 ADI。
4. 重叠区域交换数据到缓存区，然后旧值和缓冲区值叠加做平均作为新的值赋值给重叠区数组。
5. 执行第二步 ADI。
6. 再次交换数据到缓冲区，然后同步骤 4 进行同样的操作。

7. 执行一次 ADI, 计算预估电势。
8. 重复步骤 6, 但是这次交换的有于预估步的电势信息在两个计算区域之间进行交换。
9. 每个计算区域内部计算局部的残差, 使用的是二阶范数来计算局部残差, 之后归约, 求和得到总计算域的残差。然后作为总的误差限广播给每个进程。

$$Res_{local} = \|\nabla^2(\varepsilon_a \phi_{i,j}^{k+1}) + \rho_{i,j}\| \quad (3.62)$$

$$Res_{global} = \sum_{m=0}^{m=N_{proc}-1} Res_{local,m} \quad (3.63)$$

$$r_{global} = \frac{\sqrt{Res_{global}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_z} \sum_{j=1}^{N_r} [\rho_{i,j}]^2}} \quad (3.64)$$

10. 每个子区域分别求解本地的误差和预估误差, 然后分别归约求和得到总的残差, 利用这个来预估时间步长。

$$L_{\phi diff, local} = \|\phi_{i,j}^{k+1} - \bar{\phi}_{i,j}^{k+1}\| \quad (3.65)$$

$$L_{\phi error, local} = \|\phi_{i,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^k\| \quad (3.66)$$

$$L_{\phi diff, global} = \sum_{m=0}^{m=N_{proc}-1} L_{\phi diff, m} \quad (3.67)$$

$$L_{\phi error, global} = \sum_{m=0}^{m=N_{proc}-1} L_{\phi error, m} \quad (3.68)$$

$$TP_{global} = \frac{L_{\phi diff, global}}{L_{\phi error, global}} \quad (3.69)$$

11. 进行下一步迭代。

执行过以上的迭代以后, 把数据赋值给主进程, 计算电场数据和写入文件。计算电场采用了有限差分法, 每个独立的进程单独输出文件, 然后通过主进程的程序函数, 将



这些文件合并成一个文件以后输出。

3.11 本章小结

本章建立了适用于电推进等离子体的通用的 PIC 程序模型, 并且叙述了相关的数值算法原理。同时介绍了并行化的相关原理以及方法。采用了 DADI 算法去求解了电磁场, 采用了一阶插值的方法将粒子的电荷分配给了网格节点。整个程序采用了动态数组分配的方法, 并且采用了链表, 整体上能够节约计算资源。

4 计算结果讨论

本文利用编写好的程序对于 7cm/s 流量下的不同磁环提供的不同磁场下的不同物理性质进行了研究，本章展现了这些结果并且对其进行了讨论探索。同时为了使得结果可信，采用了 Comsol 计算静电场并且与本代码计算的进行对比，同时还利用普林斯顿大学的实验结果进行了验证。同时也对并行计算的结果进行了验证。下面是各个部分的具体叙述和结果的展现。

4.1 代码验证

4.1.1 静电势验证

本文首先对于静电势进行了验证，在这里使用 Comsol 进行计算，将计算域的各种边界条件输入 Comsol 得到了静电场的结果，并且利用本代码的 DADI 求解器，利用其计算，得到了静电场结果。下面是具体的结果。可以看到，图 4.1(a)与图 4.1(b)之间几乎完全一致，在羽流区都几乎完全吻合。在静电场的阳极区略有差异，这是由于边界条件设置时候无法在 Comsol 里面建立有限阳极模型，因此略有差异。其余部分几乎完全一致。因此可以我们的代码是准确的。

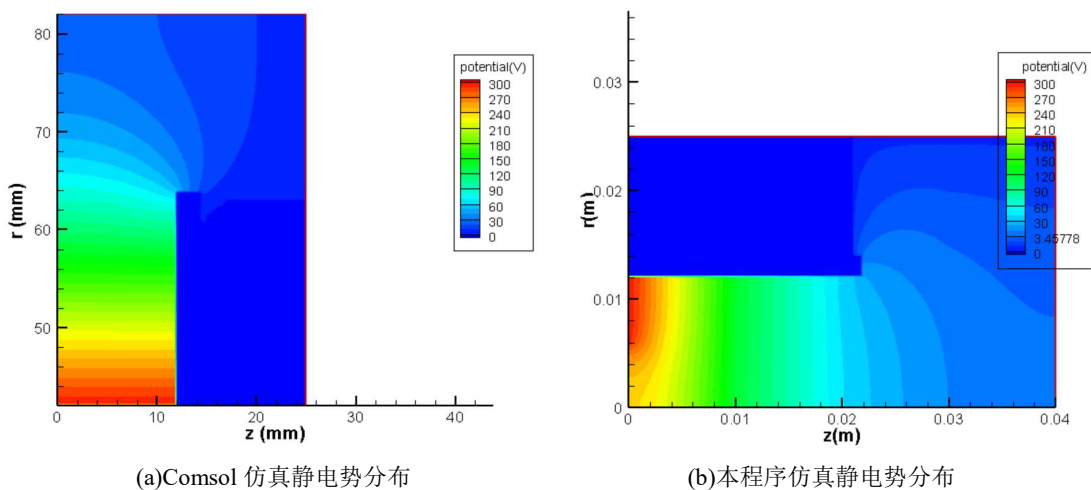


图 4.1 静电势分布对比

4.1.2 算例验证

首先我们与乔治华盛顿大学的 Dr. Brieda 的计算结果进行了对比。Dr. Brieda 的计算采用了乔治华盛顿大学 MPGDL 实验室开发的 HPHall 代码进行计算。他的代码是 Hybrid-PIC，也就是混合式的 PIC 代码，这种代码的准确性在其实验室之前的工作中已经得到了验证。Dr. Brieda 的论文中收敛后计算得到的电势分布结果如下图所示：

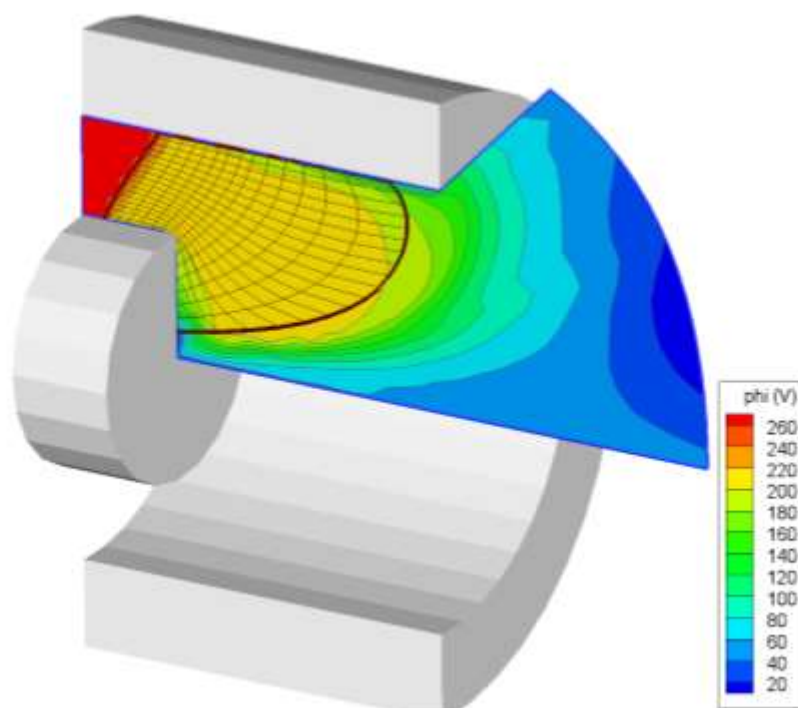


图 4.2 Dr. Brieda 对于普林斯顿霍尔推进器电场仿真^[17]

我们的代码计算收敛后的电势分布如下图所示：

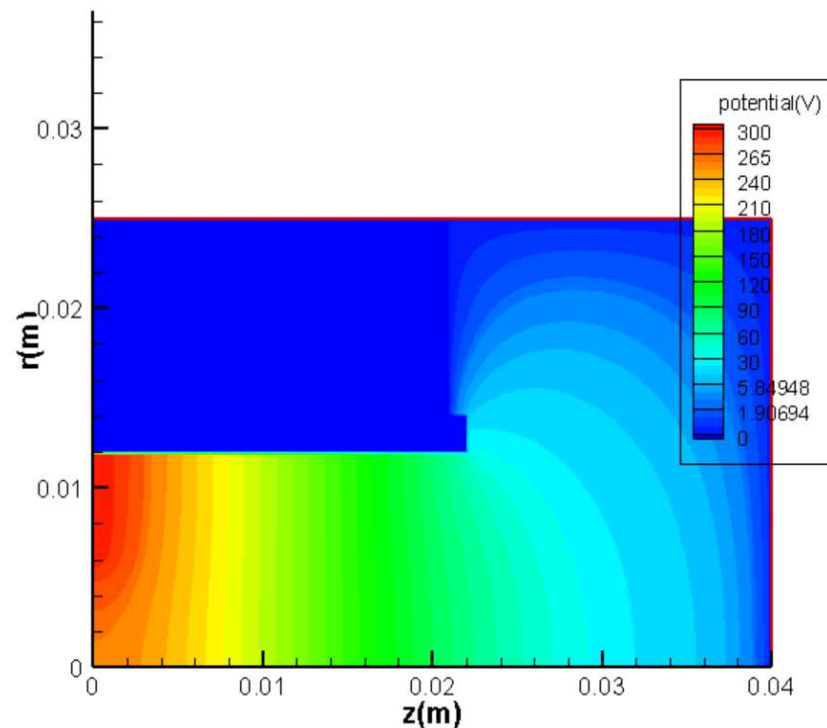


图 4.3 本代码计算电势结果

Dr. Brieda 的论文中提到他认为他计算得到的电势分布奇异，与传统的霍尔推进器内部电势分布结果有差异，传统的霍尔推进器的电势降落主要集中在放电通道内部，而 Dr. Brieda 的计算结果则主要集中于放电通道出口，Dr. Brieda 认为这样的结果只能具有定性参考价值，因为他无法解释这一结果。本文进行的计算之中，得到的电势分布中，电势降落也主要集中在了放电通道出口处。虽然我们的结果略有不同，但是可以认为是磁场强度不同和几何结构不同导致。电势降落、电势轴向分布、电势径向分布等几个关键的特征都符合的非常良好。考虑到 Dr. Brieda 的计算中采用的是 Hybrid-PIC 代码，本文进行了计算的代码是 Fully-PIC，但是得到了相似的结果，所以可以猜测这种新型霍尔推进器的电势分布主要集中在放电通道出口处。也从侧面验证了代码的准确性。

为了进一步验证计算代码的准确性，本实验室的姜逸伟，修改了 CHT-PIC 的计算域几何参数以后，验证计算了普林斯顿大学的普林斯顿圆柱型霍尔推进器的物理参数。下面是他计算得到的磁场分布成果的展示：

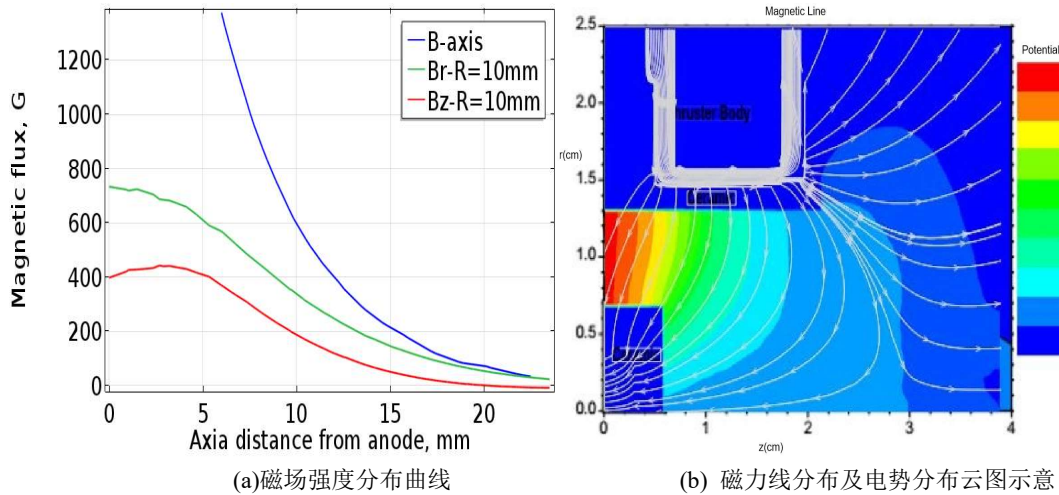


图 4.4 磁场分布对比

下面是姜逸伟计算结果和法国 Laruent 对于普林斯顿的圆柱型霍尔推进器的电势分布计算结果:

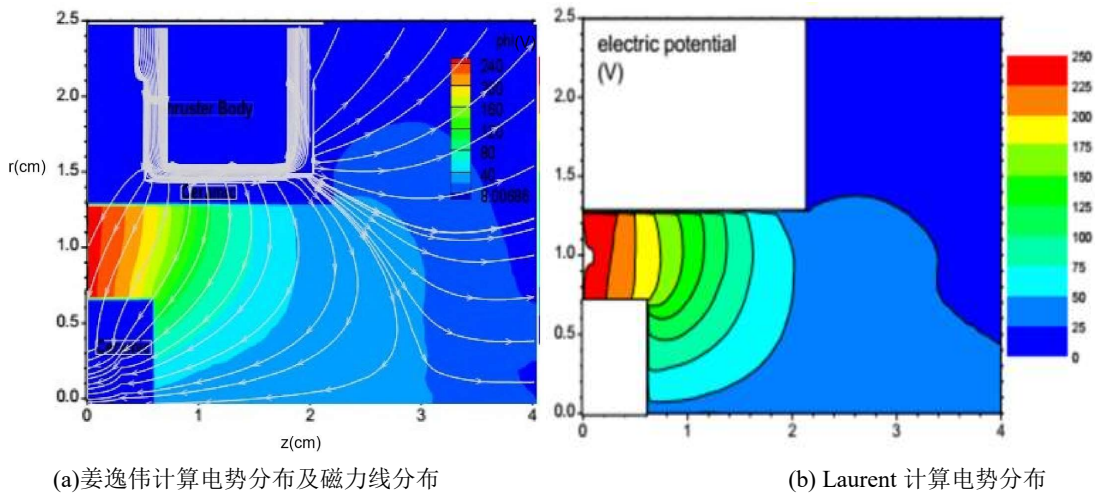


图 4.5 对于 Princeton CHT 电势计算结果对比

电势分布基本正常, 没有出现发散的情况, 在放电通道圆柱区域, 等势线和磁力线保持平齐, 属于热化电势的范畴, 而在环形区域, 等势线偏离磁力线, 说明该区域电子温度偏高, 导致实际电势偏离热化电势。和 Laurent 的结果对比来看, 分布十分接近。

下面是沿壁面电势分布的结果

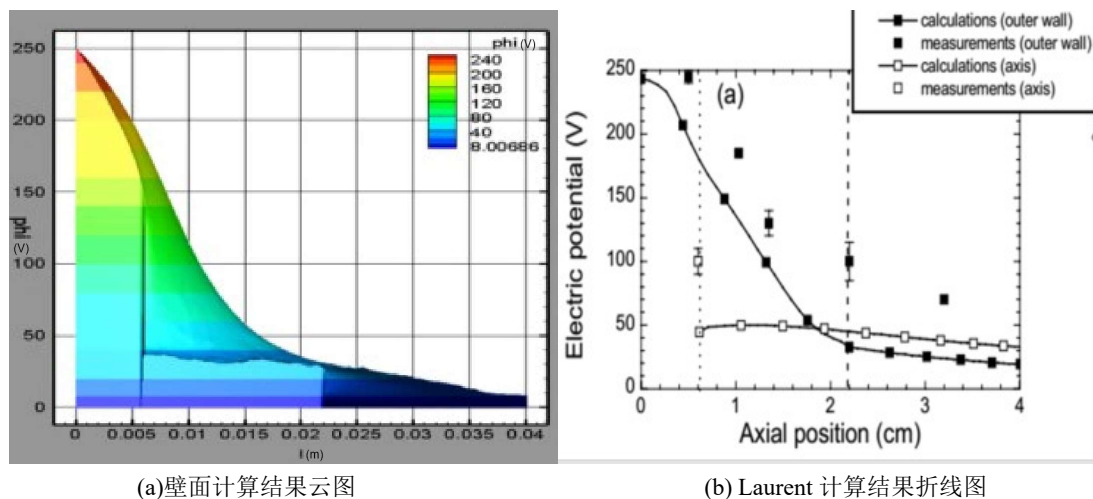


图 4.6 对于 Princeton CHT 壁面电势计算结果对比

沿壁面的电势分布和 Laurent 的计算结果也十分接近，环形区域出口 180V 左右，放电通道出口 30V 左右

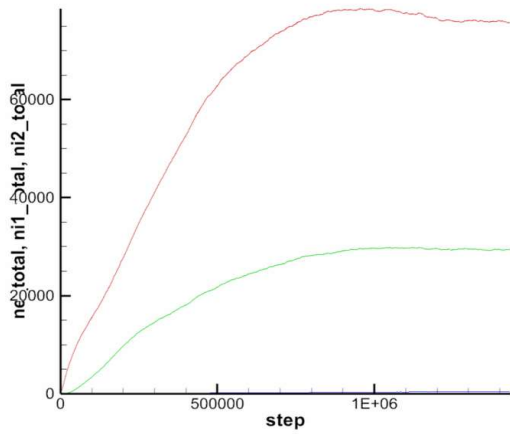
但是和真实的实验结果对比，姜逸伟的计算结果和 Laurent 的结果都偏低，尤其在放电通道内最为突出，根据实验测量结果，电势降主要集中在圆柱区域，环形区域内的电势降非常小，说明环形区域内的电子迁移率较大，电子主要被束缚在圆柱区域。计算结果偏离实际可能跟波姆系数的选择有关系。

通过对比数值计算的结果和试验的结果可以看到，我们的误差基本上保证在可以接受的范围之内，因此认为本论文开发的代码准确度是可以接受的。

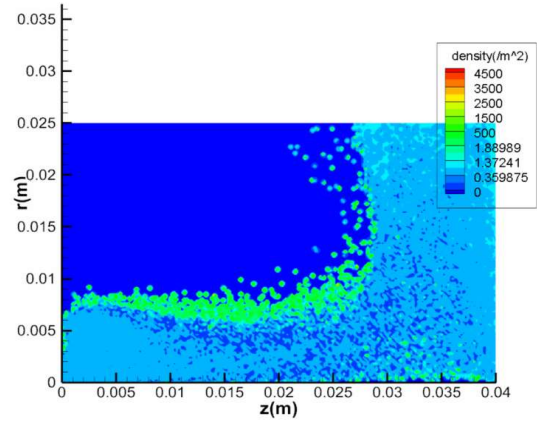
4.2 电场电势分布结果

本文计算的主要是在 7cm/s 的氙气供应工况下的不同磁场影响情况下的各种物理量分布。我们选取的工作情况是，0 磁环，1 磁环，3 磁环，6 磁环这四个工作情况。经过三天左右的计算以后，程序全部达到了收敛状态，也会是说认为此时的程序的计算结果是吻合实际物理情况的，符合实际的稳态放电。下面是四种工况情况下的电子-离子数曲线，可以注意到，这里的所有程序都达到了收敛的情况。

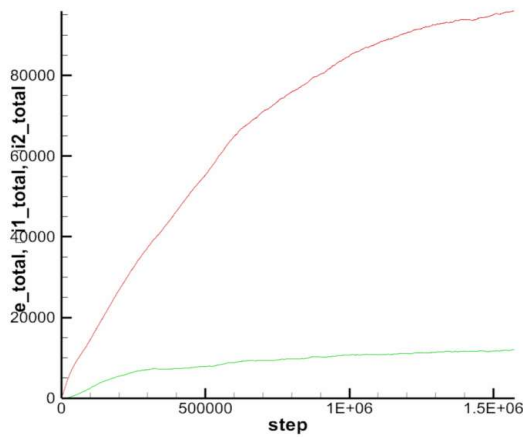
在不同的四种工况下的电势分布分别如下图所示。可以注意到几种工况下的电势存在着相似的地方：



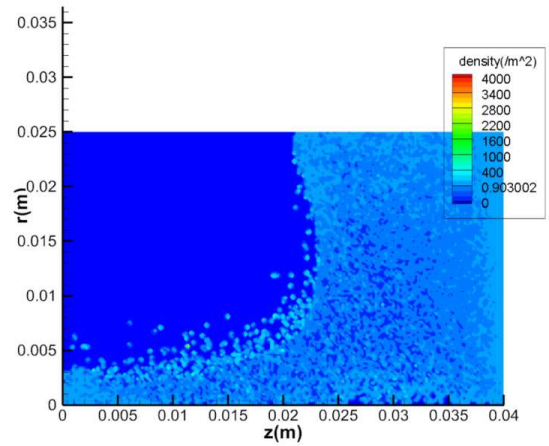
(a)磁环数目为 0 时候的收敛图



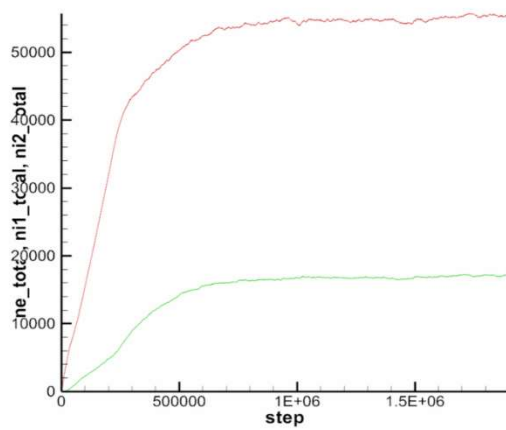
(b)磁环数目为 0 时候的浓度差分布



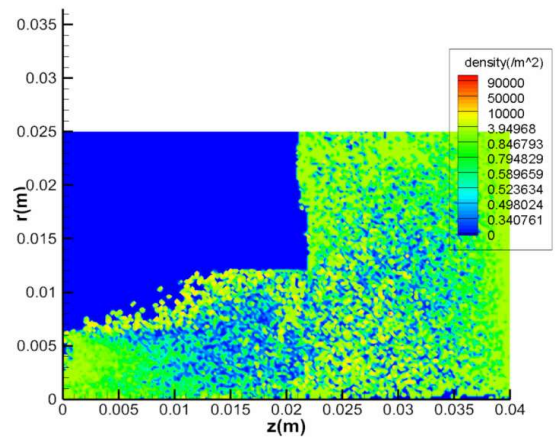
(c)磁环数量为 1 时候的收敛图



(d)磁环数目为 1 时候的浓度差分布



(e)磁环数量为 3 时候的收敛图



(f)磁环数目为 3 时候的浓度差分布

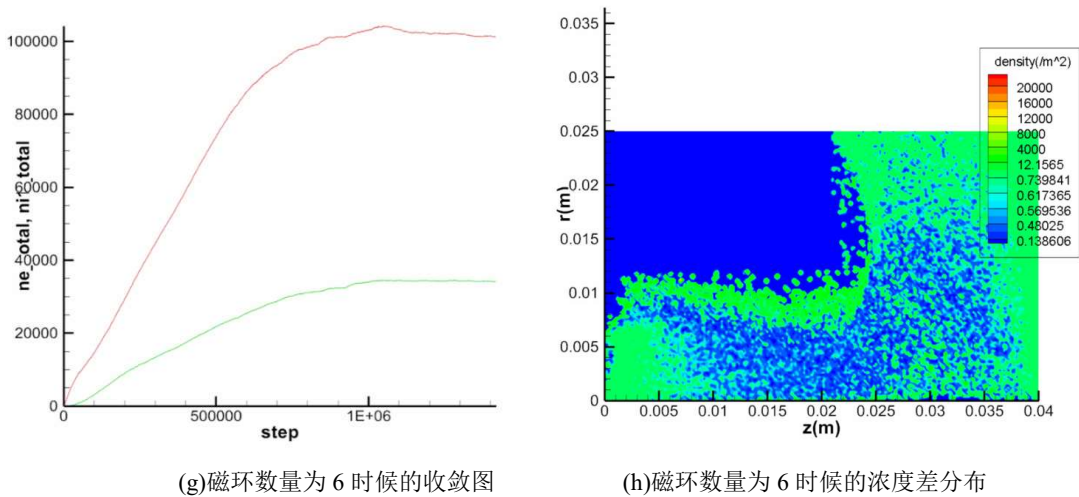
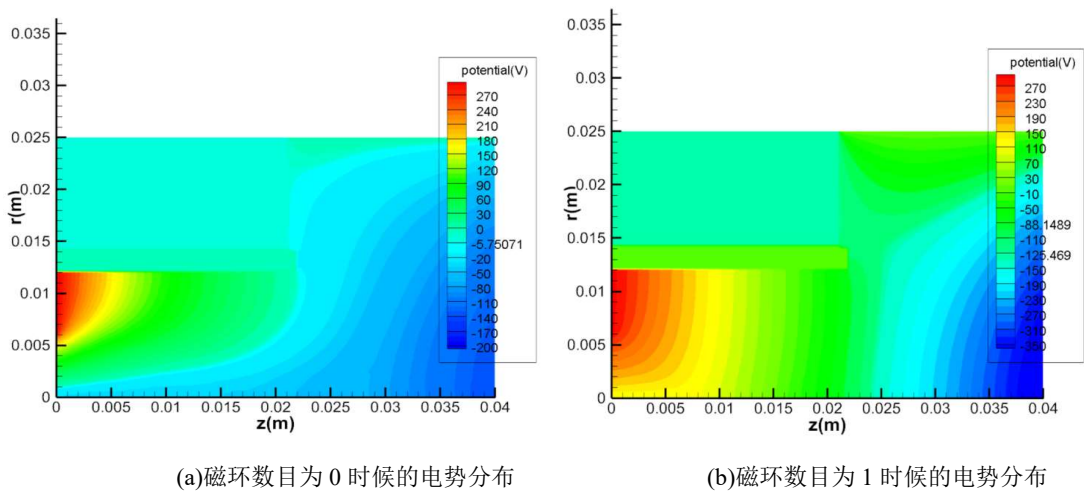


图 4.7 收敛图及浓度差分布

可以注意到几个程序都达到了收敛状态。在收敛途中注意到电子的数目和离子的数目有较大的区别，但是注意到左侧的浓度差分布图，可以注意到，在放电室内部的浓度差非常低，基本上维持了准中性条件，但是放电室壁面处的浓度差比较大，这可能是由于较多离子撞击了壁面被删除，同时羽流区的浓度差相对而言比较大。这是由于认为离子不受到磁场影响，所以飞出计算区域以后没有再返回，但是电子由于受到磁力线束缚，会返回羽流区，这样导致的结果就是计算中我们需要重新注入电子，因此羽流区域几个边界处的电子离子浓度差比较大。



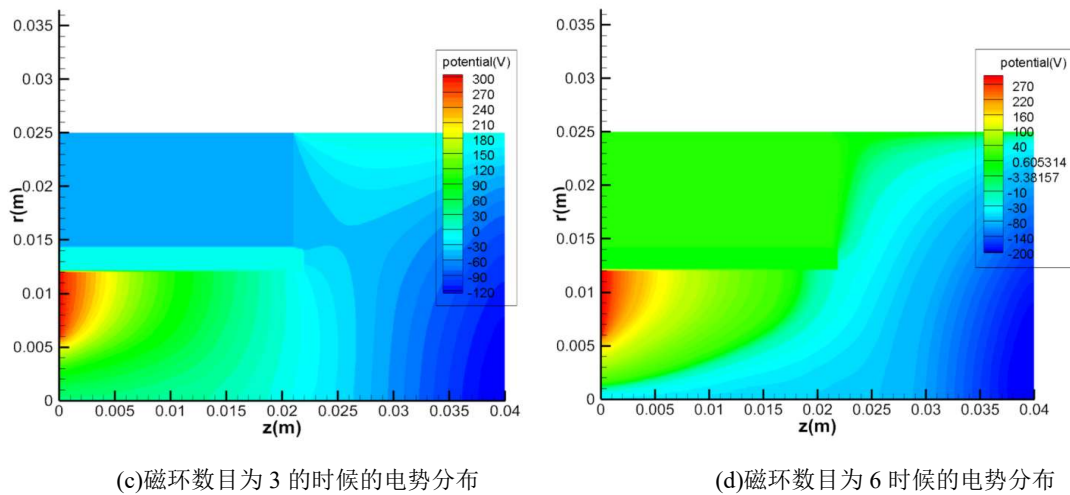


图 4.8 电势分布云图

可以看到虽然不同的磁场分布对于电势的影响比较大,但是几张图之间的电场分布特性具有共同特点,几张图之间的电场分布均存在着的非常大的不均匀性,在放电通道内部的阳极附近区域,电势最高,但是电势降落并不明显,在放电通道内部的阳极下方区域,均存在着电势降落,也就是存在着一个既有轴向分量又有径向分量的电场,这也与物理实际符合,实际上离子确实在这个区域会呈现出这样的运动。同时可以看到放电通道出口处的电势降落非常大,这与传统的霍尔推进器并不一致,这也是圆柱型霍尔推进器的主要特征之一。同时可以注意到沿着外壁面的电势降落分布均匀,同时注意到羽流区的电势分布比较均匀,存在着和放电通道出口很大的电势降落。可以注意到放电通道左侧壁面处作为电离的主要区域的确存在着较大的电势降落。

几张电势分布云图中可以明显观测到电势分布受到磁场的影响极大。磁环为0的时候的电势分布和磁环为6时候的电势分布形状接近,但是在阳极区的电势分布有较大区别,可以注意到磁环数目为0时候的阳极电势区相对于磁环数目为6时候的电势分布明显小,这可以解释为磁场对于电子运动的影响,电子被磁力线束缚,难以进入阳极附近区域。磁环数目在1和磁环数目为3时候可以注意到在羽流区的放电通道出口处的电势分布略有不同,这种不同的可能来源在于磁环分布的并不均匀,可能导致磁场位型有差异,导致了放电通道出口处不同的电势分布。放电通道出口处的磁镜比比较小,电子受到磁力线的束缚也要相对小很多,因此也可以对这里的电势分布的结果进行一种可能的比较准确的解释。

磁场的增大导致了阳极区域的不断扩大,这可能是由于磁场强度的增强导致了电子进入阳极区的难度增大,这对设计磁场位形有指导性作用。

4.3 电子、离子分布

几种情况下的电子浓度分布见下图

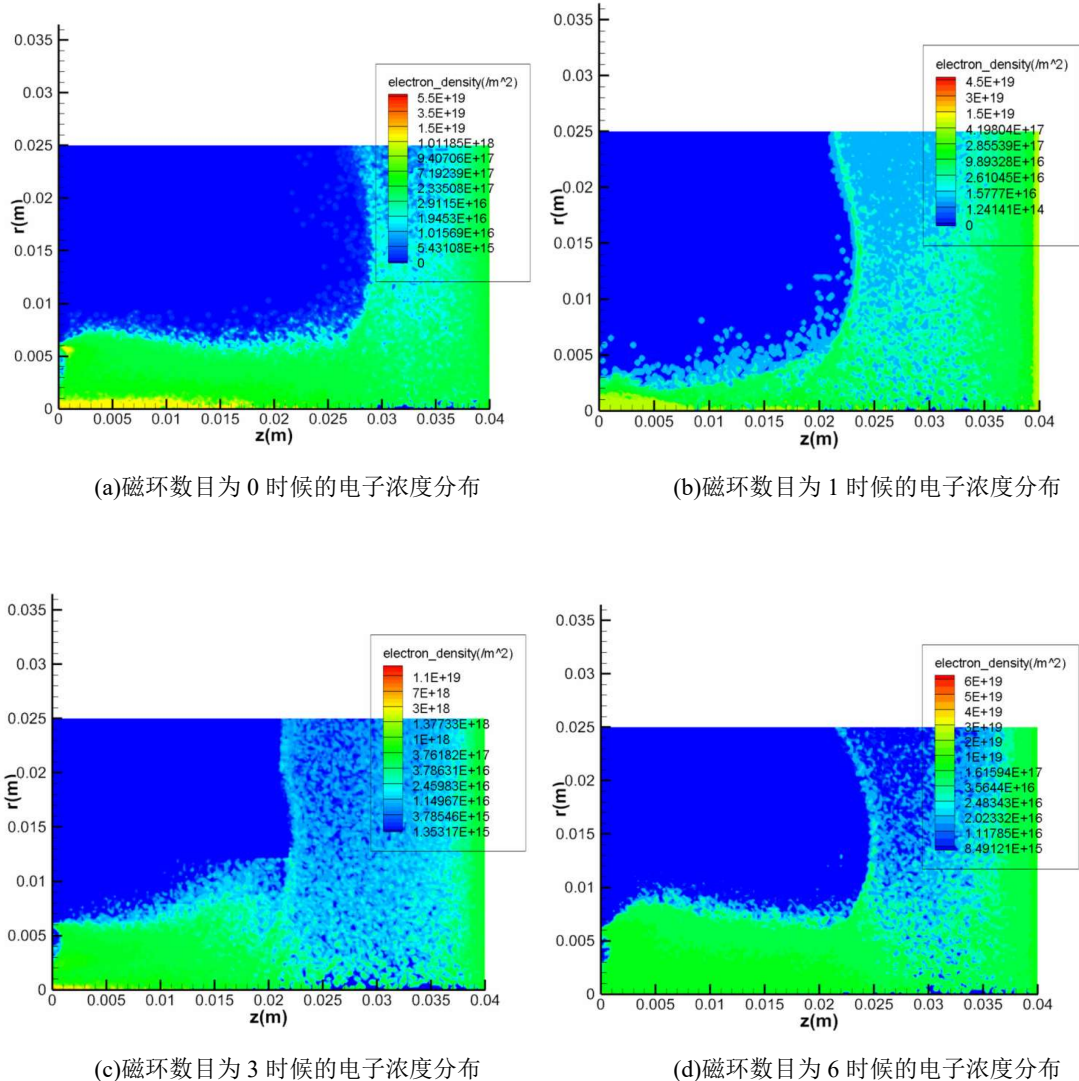


图 4.9 电子浓度分布

从上面的电子分布云图中可以看到，不同的磁场位形对于电子浓度的分布影响比较大，但是不同的分布之间仍然存在着相似点。可以看到电子密度分布比较密集的区域主要集中于放电通道内，这与实际上电势的分布也吻合。轴线附近的电子密度分布对于放电室内部其他区域的密度更加大，与上文的电势分布进行比较，由于在阳极区存在着较高的阳极电势区，因此电子较难到达这里，所以在都会难以接近阳极区，孤儿分布在轴线附近比较多。同时还要注意，在右侧自由边界处的电子密度都比较大，这是由于在右侧自由边界处是注入电子的边界，同时还要考虑到本文在羽流区执行了电子的再注入，所以这边的电子浓度很高。还有值得注意一点的是，在每种工况下，都会存在着一

个中间区域, 在这个区域之中, 电子浓度分布非常低, 这个区域分布在羽流区的中间, 对比之前的电势分布可以看到, 在这个区域, 恰好分布着一个电势分布非常均匀地区域。因此在这里形成了一个电势平台, 电子会难以进入这个区域。

从云图中可以看出, 磁场的不同, 导致了对于电子的磁力线约束不同, 较强的磁场中, 可以看出电子在放电室中的密度增大, 同时电子密度分布更加接近放电通道外部壁面。磁场强度越强的工况下, 羽流区域的电子密度分布的更加均匀。这可能是由于磁场强度比较大的时候, 分布的磁力线密度比较大, 由于电子运动受到磁力线约束, 因此可以做漂移运动进入放电通道更加深入的区域。同时由于磁场强度的增大, 沿着外磁极的电子密度分布也逐渐增大, 这可以解释为磁场强度增大的影响。

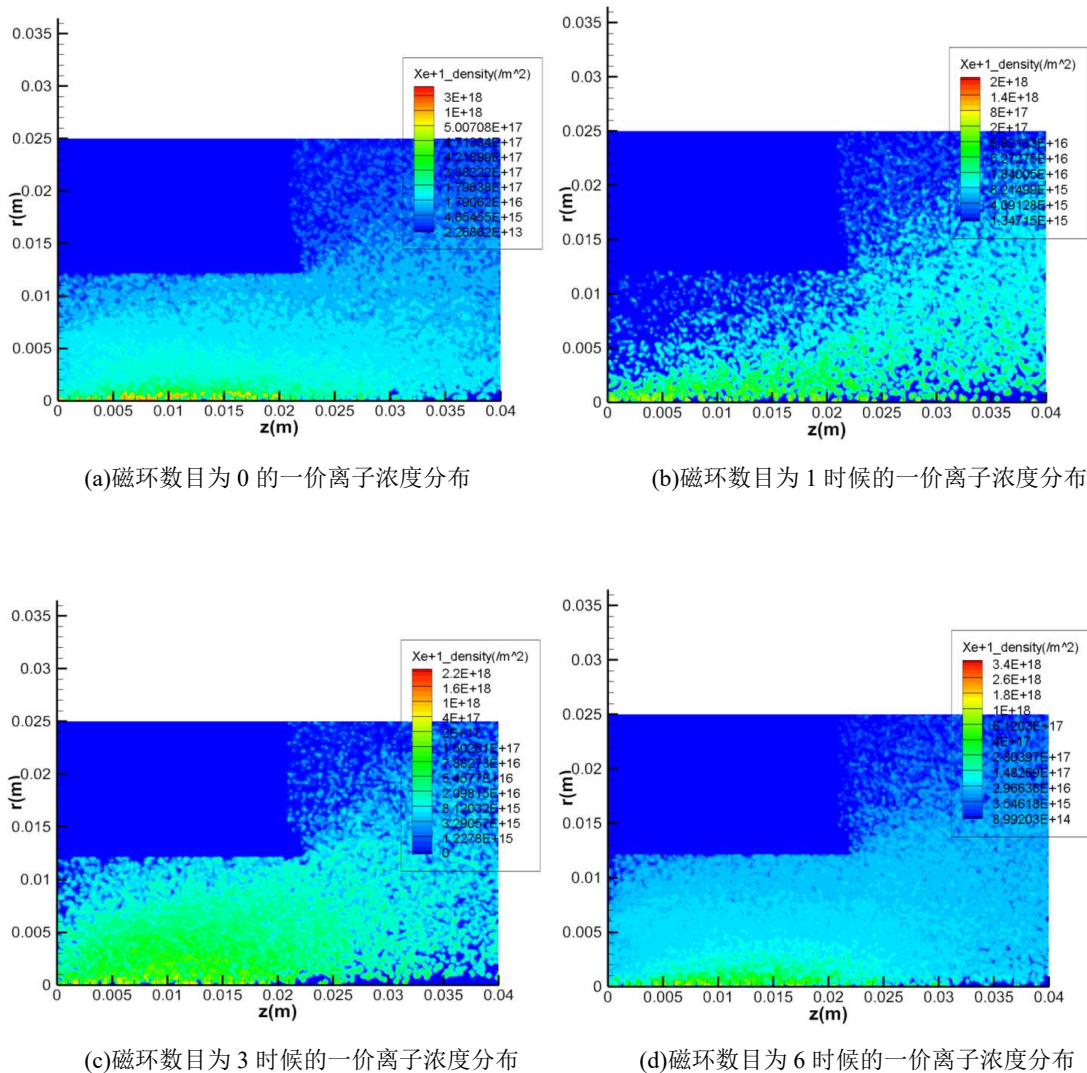


图 4.10 一价离子浓度分布

一价离子的密度分布也具有明显的共同特征, 一价离子密度分布密集的区域主要集

中于轴线附近,沿着放电通道外壁面附近的一价离子分布比较少,羽流区域的一价离子分布规则不明显。放电通道轴线附近密集的一价离子集中地主要原因是电子在轴线附近的密度分布比较大,可以有效的增大碰撞频率,从而产生数量比较多的一价离子分布。在放电通道阳极区域的离子密度分布比较少,这是由于所在的区域电子密度分布比较少。由此可见,电子的密度对于电离过程有着决定性影响。同时由于磁场的强度不同,电子的密度分布不同,电势的分布不同也间接导致了一价离子的分布不同。在这里的主要体现是电离的越来越充分,同时密度分布也越来越均匀。

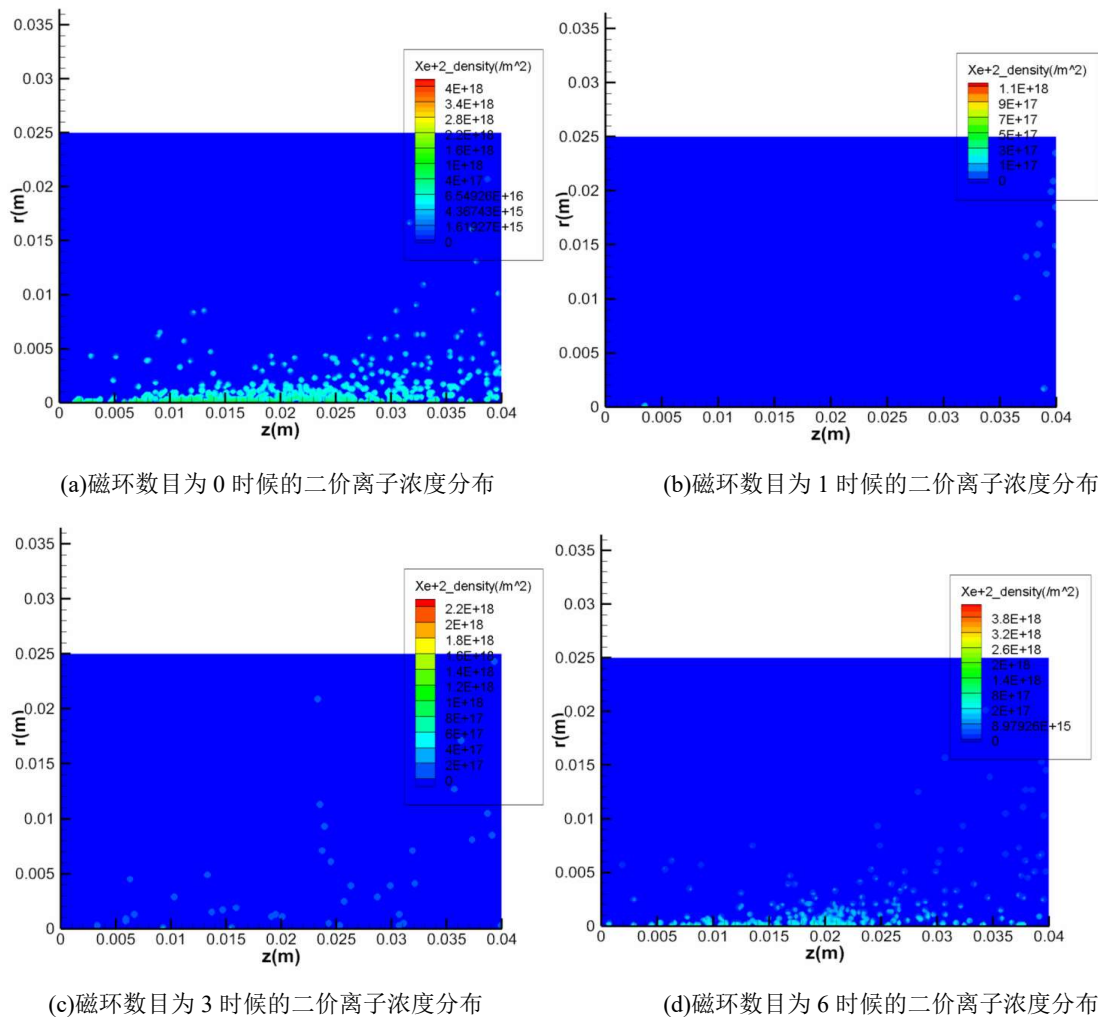


图 4.11 二价离子浓度分布

二价离子的数目在仿真中并不是主要的影响因素,在以上的云图中也可以看出,在轴线附近虽然二价离子的密度分布达到了接近一价离子分布的数量级,但是在放电通道其他区域以及羽流区都很少,尤其是磁环数目为 1 时候的云图中,可以看出即使在轴线附近的二价离子分布也是非常少的。这是由于电离出来二价离子的唯一来源就是高能量

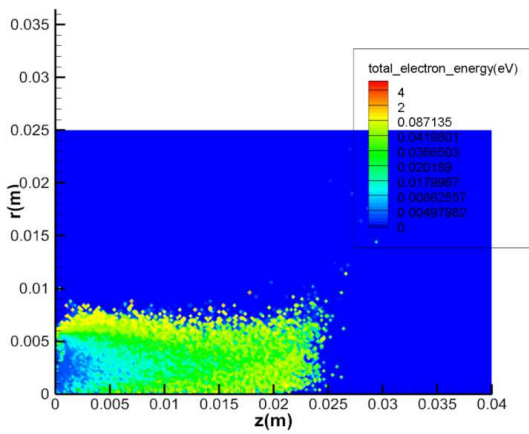
电子撞击一价离子得到，本身一价离子的分布就远远不如原子的背景分布密度大，同时电子的能量能够达到二价电离能的就更加少，因此非常难以电离出二价离子，这也就能够解释二价离子数目的相对较低的情况了。

4.4 电子温度分布

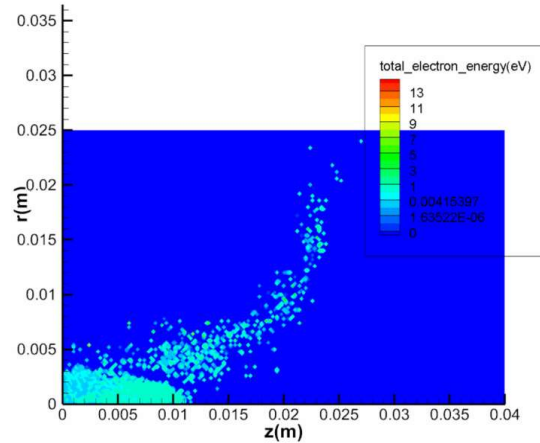
本文中定义了计算电子温度的方法：

$$T_e = \frac{E_e - V_r^2 - V_z^2 - V_\theta^2}{11594K_b} \tag{4.1}$$

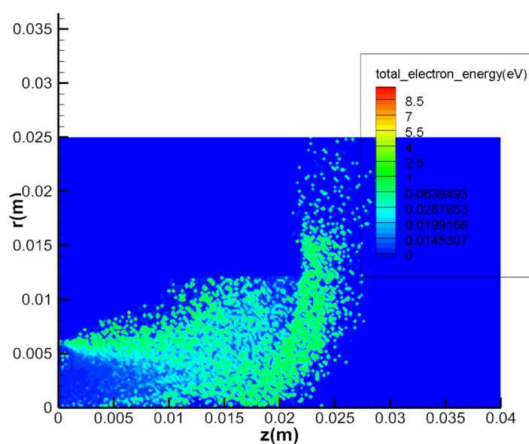
其中的每个速度平方及电子能量都是平均量，也就是除掉当地电子总浓度。



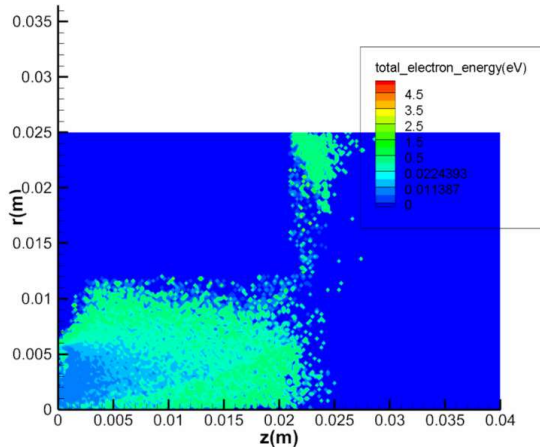
(a)磁环数目为 0 时候的电子温度



(c)磁环数目为 1 时候的电子温度



(c)磁环数目为 3 时候的电子温度



(d)磁环数目为 6 时候的电子温度

图 4.12 电子温度分布

通过观察电子温度分布,可以明显地发现,电子温度在有无磁环时候的分别比较明显,这里可以看到电子温度在没有磁环的时候均匀分布在放电通道内部,几乎没有分布在羽流区之中,但是有了磁环以后,电子温度分布变成了类似于条形分布的形状,同时进入了羽流区域。同时需要注意的是不同磁场下,电子温度的数值并不均匀,最大值也产生了较大的波动,可以说明这里的电子温度受到了磁场变化影响,并且不是简单的线性变化。这可能与电子的反常传导有关。这部分可以后续研究的重点。

同时需要指出的一点就是,电子温度属于人为定义的物理量,其计算方式可能在不同的论文中并不一致。所以其具体的数值并不相同。以上计算的主要作为定性分析来使用。

4.5 并行验证

首先进行验证的是是否完成了并行任务。本论文设计了一种简单有效的办法输出验证这一问题。本论文在右边界第二类边界条件的情况下验证了一个简单的算例(与上文的 Comsol 算例一样的右侧自由边界第二类边界条件),本论文之中,利用并行求解器的每个进程单独输出一个数据文件然后绘制成云图,观察是否符合设置的空间区域边界条件(只进行第一步计算时候,所有多余的重叠区域全部被赋值为 0),就可以验证是否每个进程进行了单独的计算。

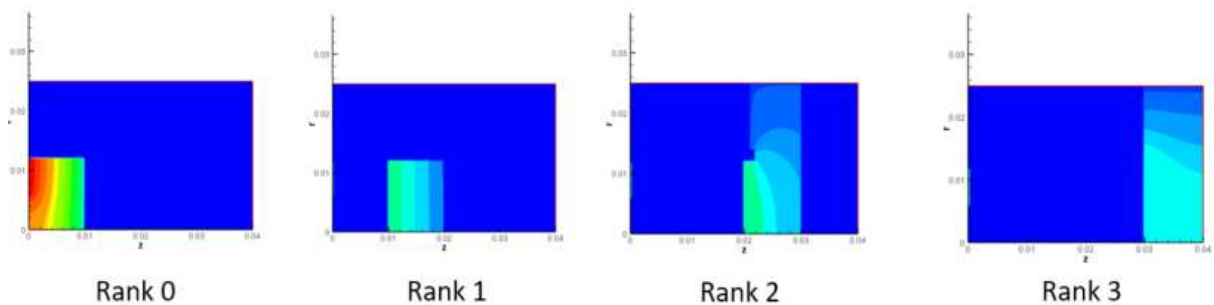


图 4.13 并行验证

通过上图可以看到,每个进程之间严格完成了并行的计算区域分割,并且执行了计算,能够顺利完成通信,并且顺利完成计算。

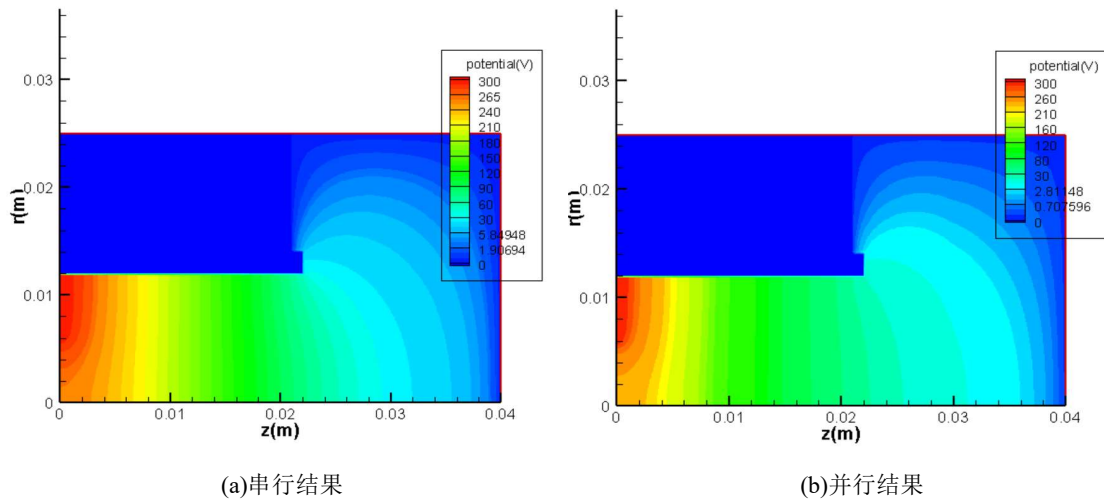


图 4.14 串行并行电势分布对比

上图是串行计算结果和并行计算结果之间的对比。可以看到这里的结果基本完全一致，可以说计算结果的吻合程度比较好。略微的不同主要是云图生成过程中的等势线显示问题，实际数值基本完全一致。

在实际计算过程中，发现实际需要的迭代次数要比串行略长，这是由于实际上本文中划分计算区域以后每次迭代过程中本地的计算区域的边界条件都会发生改变，这会使得矩阵变得不能保证一直向着三对角矩阵的方向发展。同时由于本并行实验之中全部的信息(初始条件)全部集中于左侧边界，那么传递信息要经过三个不同区域的信息传递，可能会变得略慢。同时注意到 Mahalingam 的论文^[14]中对于 100 列矩阵使用了 20~30 个处理器，划分了 20~30 个计算域，但是本文使用的计算区域只有 4 个，这也可能导致了计算速度略慢。

另一个需要计算的是并行的效率。对于计算静电场，采用达到收敛所用的时间进行对比。引入加速比，计算公式见下：

$$\eta_{accelerate} = \frac{T_{sequential}}{T_{parallel}} \times 100\% \quad (4.2)$$

再引入并行效率：

$$\eta_{efficiency} = \frac{\eta_{accelerate}}{P_{number}} \quad (4.3)$$

对于本程序，经过计算， $\eta_{accelerate} = 2.37$ ， $\eta_{efficiency} = 59.25\%$ 。通信所消耗时间可能成为使



得计算效率达不到理想计算比的原因。

另外需要注意的是动态时间预估步骤。这一步经过验证，对于计算收敛速度影响极大。如果不加入动态时间调整，整个计算可能需要数以千计步骤才能够收敛，但是加入了动态时间预估调整步骤以后，计算所需要的收敛步骤只需要不超过 100 步。但是步长的选择非常关键。由于实际计算区域相对于串行的计算区域已经发生了改变，因此计算过程中的误差估计，二阶范数估计都会发生变化。实际计算过程中发现，相对于原本串行稳定后的动态时间调整系数变化范围，并行的动态时间调整系数变化范围比较小，这可能会导致实际计算过程中信息传递速度偏慢。造成这种机理的原因尚有待于具体的研究。还需要注意的一点，本文中的所有并行过程中采用了 MPI 编写，是进程尺度上的 CPU 并行，同时在实际并行实现手段的选择上，本文采用了阻塞式并行的方法，这种并行方式计算效率不如非阻塞式并行，但是胜在安全性好，不容易发生死锁现象。之后如果需要继续提高计算效率，可以采用非阻塞式并行，通信和计算同步进行。

4.6 小结

本章首先展示了几个算例来对计算代码的准确性进行验证，得到了较好的结果，证明了本文所使用的代码的准确性。其次讨论了计算结果，重点在于对于电势分布的讨论和电子、离子浓度分布以及电子温度分布的讨论。最后讨论了并行求解器的准确性，均得到了较满意结果。讨论发现，磁场对于放电室内部的电子分布影响非常大，同时电子的分布会影响电势分布，电势分布和电子分布又会叠加起来影响离子电离过程，进而间接的影响离子浓度分布，并且影响到电子的温度分布。本文的仿真结果说明磁场设计对于提高圆柱型霍尔推进器内部工作情况有着非常大的影响，后续详细的工作可以进一步数值仿真特殊的磁场构型的影响。



结 论

本文主要是设计了一种通用的 PIC 程序,并且针对于圆柱型霍尔推进器进行了验证。计算区域包括了放电通道以及羽流区,同时对于程序进行了优化设计,并且设计验证了并行算法。同时本文介绍了主要的几种数值仿真方法,建立了新颖的物理模型,编写了完整的仿真程序。利用设计好的算法进行了测试工作,验证了代码的准确性,并且计算了不同磁场位形下的电势分布、电子浓度分布等主要物理量分布,本文所获得的主要成果和结论如下:

- (1) 通过对于相关文献的阅读学习,掌握了新型霍尔推进器的主要工作原理及结构,建立了仿真二维物理模型,对于圆柱型霍尔推进器进行仿真,求解了放电通道及羽流区的多种物理量分布。
- (2) 利用 MPI 编写了本实验室第一套并行程序,对于 PIC 程序所使用的 DADI 算法进行了并行化,并且进行了验证,得到了满意的结果。
- (3) 讨论验证了本论文所使用的程序,验证了代码的可行性,与之前研究者使用不同方法得到的结果进行了对比,得到了满意的结果,说明了代码的可行性和准确性。
- (4) 计算并讨论了不同磁场位形下面推进器内部的物理量分布情况,重点研究了电势分布、电子浓度分布、一价离子浓度分布、二价离子浓度分布、电子温度分布。发现了磁场位形对于物理量分布影响非常大,增强的磁场可以影响到电子浓度的分布,从而影响到电势的分布,从而影响了离子浓度分布,对于推进器的电离会造成比较大的影响。因此设计推进器时候需要慎重选择磁场位形。

本文仍然存在着一些不足之处,主要是:

- (1) 计算代码中为了减少计算量,把原子密度作为了固定的背景密度,可能会影响计算的精度。
- (2) 并行验证之中只考虑了四个进程,没有采用前人研究中优化的得到的最佳进程数目。对于动态时间调整上还略有不足。同时只做了并行化的电场求解器,没有做



并行化的粒子运动求解器。

(3) 对于物理结果的讨论还不够深入，需要进一步深化讨论。

可继续深入的下一步工作：

- (1) 对于程序可以设计非阻塞式的并行程序，提高并行效率，同时可以尝试 GPU 并行
- (2) 可以加入 MCC 模块，把原子也纳入考虑之中，观察是否和目前结果一致。
- (3) 可以深入进一步探讨物理机制，可以为磁场位形设计提供有力的一手资料，同时可以研究新的等离子物理机制。



致 谢

首先我要感谢我的导师，汤海滨教授。我初识汤老师是在大二的春天。第一次和汤老师见面是在沙河。汤老师当时收到我的邮件以后第一时间回复了我，并且百忙之中抽出时间和我进行了一次亲切的面谈。在面谈中汤老师给予了我很多帮助和指导。汤老师让我第一次了解了详细的科研问题，为我制订了详细的科研规划。在沙河期间，每次来到学院路，都会和汤老师聊上一次，几乎每次聊天都给了我很多前进的动力和方向的指导。回到学院路以后汤老师为我精心制定了计划，耐心指导我，为我提供了良好的科研环境。每次科研遇到难关，汤老师总是能从多方面为我分析问题，为我提出可行的解决方案。汤老师为我开阔了眼界，汤老师在科研上的精益求精的品质和他儒雅的为人永远是我学习的目标。

其次我要感谢我们 SPEPL 实验室的任军学老师。任老师为人细致认真，给予了我很多的指导。在我参加的每一次组会之中，任老师都非常认真细致的听取我的汇报，不厌其烦的和我们讨论，指导我们避开每一个可能出现问题的环节。我曾在深夜给任老师发去邮件，任老师几乎是秒回了我，这让我自愧弗如，我自问我难以在深夜还在科研工作。任老师给予我的论文上都做了详细的批注，任老师用自己的实际行动教会了我科研工作者对待科学技术应该有的严谨认真的态度。再次感谢任老师教会了我严谨认真的工作品质。

感谢 SPEPL 实验室的每一个师兄师姐师弟（我下面应该暂时没有师妹）。感恩我在 SPEPL 的每一天有你们的陪伴。首先要感谢李敏大师姐。我回到学院路的第一周，汤老师安排李敏大师姐来教我 PIC 仿真。李敏师姐给予了我很多科研上的帮助，是师姐手把手把我从一个小白培养成了一个科研界新兵。其次我要感谢姜逸伟师兄。师兄是一个非常细心认真的人，他也是一个非常有趣的人。他在科研中带着我工作，为我答疑解惑，在生活中常常和我一起交流。我感觉从师兄身上受益良多。师兄的科研想法啊也对我起到了很大的启迪，没有师兄，这套程序难以完成，是师兄无私的帮助和严谨的态度还有悉心的指导引领我一步一步完成了这份工作。感谢姜师兄。还要感谢曹帅、章喆、王宝军三位师兄，他们在我科研中为我带来了很大帮助。感谢刘祺师姐和周珺师姐，我在毕设中阅读了很多她们的工作，得到了很大的启迪。感谢卢昕师兄、李泽峰师兄、王雨玮师兄、张广川师兄、陈志远师兄，给了我很多科研上的指导，也让我更快的融入了实



验室。感谢付宸聪小师弟，协助我搭建了实验室第一个 Linux 高性能并行计算平台。还要感谢 SPEPL 其他的每一位师兄师姐师弟们，是你们的无私帮助和包容助我成功。

更要感谢我的每一位亲人，感谢我的祖母、外婆、舅舅舅妈和姑姑姑父，是你们的爱帮助我进步，是你们为我无私奉献，给予我贴心的关怀。永远感谢你们无私的爱！

最后，也是最重要的，我把这段刻意放在了最后，感谢我的父亲母亲，崔向东先生和苏庆珍女士。感谢你们赋予了我生命，用 120%的努力和爱养育着我，伴随我成长，给予我指导，为我提供你们能够提供的最好的一切。没有你们的支持和鼓励我断然没有机会追求我自己的理想。是你们的宽容与理解让我能够选择我自己喜爱的一切，是你们的包容和支持让我有参加很多活动的机会。我始终认为你们是非常开明的父母。在我从小到大的生活中，虽然对于我要求十分严格，管教的非常严厉，但是却在每一个关于我自己的人生选择上给予我建议，让我能够独立自主的做出判断。高中时候选择文理科的时候，我文理科都很好，父母对我的建议是随着自己的兴趣，大学报考时候我的父母也只是帮我参谋，但是选择学校完全交给了我，也允许我选了航空航天这个外人看来预期收入很低的行业，因为他们相信我到哪个行业都能做好。大学期间他们鼓励我走出去，并且给予了我实际的支持，在中国环游，去德国交换，在欧洲旅行，这一切都因为父母积极的支持才能实现。即将踏出国门深造，父母依然积极支持，并且让我自己选择。我想学会选择，学会对自己的选择负责，是我学会的重要一课，是我成长为男人的重要一关。爸爸妈妈，谢谢你们。

诸葛亮在《出师表》中写到，临表涕零不知所言。今天我也有一些类似的体会。对着电脑屏幕，想说的太多的感谢的话不知道怎么表达。只能把我的千言万语汇集成四个字，也用来作为我这篇致谢的结束语，那就是，永远感恩！



参考文献

- [1] Smirnov A, Raitses Y, Fisch N J. Experimental and theoretical studies of cylindrical Hall thrusters a[J]. *Physics of Plasmas*, 2007, 14(5): 057106.
- [2] Smirnov A, Raitses Y, Fisch N J. Electron cross-field transport in a low power cylindrical Hall thruster[J]. *Physics of plasmas*, 2004, 11(11): 4922-4933.
- [3] Garrigues L, Hagelaar G J M, Boeuf J P, et al. Two Dimensional Hybrid Model of a Miniaturized Cylindrical Hall Thruster[C]//30 th International Electric Propulsion Conference. 2007.
- [4] 刘祺. 微型霍尔推力器放电特性数值模拟研究[D].北京: 北京航空航天大学.2017.
- [5] Szabo Jr J. J. Fully kinetic numerical modeling of a plasma thruster [D]; Massachusetts Institute of TECHNOLOGY, 2001.
- [6] Hagelaar G. J. M., Bareilles J., Garrigues L., et al. Role of anomalous electron transport in a stationary plasma thruster simulation [J]. *Journal of Applied Physics*, 2002, 93(1): 67-75.
- [7] Boniface C., Garrigues L., Hagelaar G. J. M., et al. Anomalous cross field electron transport in a Hall effect thruster [J]. *Applied Physics Letters*, 2006, 89(16): 161503-161503-161503.
- [8] Szabo J., Warner N., Martinezsanchez M., et al. Full Particle-In-Cell Simulation Methodology for Axisymmetric Hall Effect Thrusters [J]. *Journal of Propulsion & Power*, 2014, 30(1): 197-208.
- [9] Cho S., Watanabe H., Kubota K., et al. Study of electron transport in a Hall thruster by axial-radial fully kinetic particle simulation [J]. *Physics of Plasmas*, 2015, 22(10): 026410.
- [10] 史肖霄. 离子推力器放电室的粒子模拟 [D]. 北京; 北京航空航天大学, 2016.
- [11] J.J.Szabo.Fully kinetic numerical modeling of a plasma thruster.Thesis for the Degree of Doctor of Philosophy.Massachusetts Institute of Technology.2001.
- [12] Birdsall C K, Langdon A B. Plasma physics via computer simulation[M]. CRC Press, 2004. Birdsall



- [13]Hewett D W, Larson D J, Doss S. Solution of simultaneous partial differential equations using dynamic ADI: Solution of the streamlined Darwin field equations[J]. Journal of Computational Physics, 1992, 101(1): 11-24.
- [14]Mahalingam S, Menart J A. Particle-based plasma simulations for an ion engine discharge chamber[J]. Journal of Propulsion and Power, 2010, 26(4): 673-688.
- [15]Stindl T, Neudorfer J, Stock A, et al. Comparison of coupling techniques in a high-order discontinuous Galerkin-based particle-in-cell solver[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2011, 44(19): 194004.
- [16]Chen G, Chacón L, Barnes D C. An energy-and charge-conserving, implicit, electrostatic particle-in-cell algorithm[J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230(18): 7018-7036.
- [17]Brieda L. Multiscale Modeling of Hall Thrusters[D]. The George Washington University, 2012.
- [18]Richard R.Hofer*, Ioannis G. Mikellides,† Ira Katz,‡ and Dan M. Goebel§. Wall Sheath and Electron Mobility Modeling in Hybrid-PIC Hall Thruster Simulations. AIAA 2007-5267.
- [19]John T.Yim*, Michael Keidar†,and Iain D. Boyd‡. An Evaluation of Sources of Erosion in Hall Thrusters. AIAA 2005-3530.
- [20]Fife, J. M. Hybrid-PIC modeling and electrostatic probe survey of Hall thrusters. United States-Massachusetts. Massachusetts Institute of Technology. 1999.
- [21]李敏. 电磁发动机加速通道的 PIC 计算[D].北京: 北京航空航天大学.2011.